Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»

На правах рукописи

АЙКАШЕВ Павел Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА ФРАКТАЛЬНЫХ АНТЕНН

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ (технические науки)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Бойков Илья Владимирович

Пенза – 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
ГЛАВА 1. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФРАКТАЛЬНЫХ АНТЕНН И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТЕНН С ФРАКТАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ 12
1.1. Обзор антенн с фрактальной топологией 12
1.2. Математические модели антенн 17
1.3. Математические модели электрических вибраторов 19
1.4. Излучение проволочной антенны 24
1.4.1. Интегральное уравнение проволочной антенны 24
1.4.2. Модели источников питания 27
1.4.3. Уравнение проволочной антенны с учетом источника питания 30
1.4.4. Диаграмма направленности 32
1.5. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов и решения гиперсингулярных интегральных уравнений 35
1.6. Вспомогательные сведения 41
Основные результаты и выводы по главе 1 48
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА АНТЕНН 49
2.1. Численный синтез антенны с заданной диаграммой направленности 49
2.2. Численный метод решения задачи распределения тока по вибратору на основе уравнений Поклингтона и Галлена 54
2.3. Моделирование антенн интегральными уравнения Фредгольма 73
2.3.1. Постановка задачи моделирования антенны 73
2.3.2. Математическая модель обратной задачи теории антенн с топологией фрактала Кантора 76
2.3.3. Математическая модель обратной задачи теории антенн с топологией фрактала Серпинского 81
Основные результаты и выводы по главе 2 82

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ФРАКТАЛАХ 83
3.1. Численные алгоритмы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах 83
3.2. Численные алгоритмы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси 104
Основные результаты и выводы по главе 3 123
ГЛАВА 4. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ 124
4.1. Программный комплекс для приближенного решения задачи синтеза антенн с фрактальной топологией 124
4.2. Программа для численного синтеза антенны с заданной диаграммой направленности 126
4.3. Программы для приближенного решения уравнений Поклингтона и Галлена 128
4.4. Программа для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений на исследуемых многообразиях 130
4.5. Результаты применения разработанных программных комплексов для решения модельных задач 133
Основные результаты и выводы по главе 4 165
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 166
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 168
ПРИЛОЖЕНИЕ А 183
ПРИЛОЖЕНИЕ Б 185

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Одной из основных задач современной радиоэлектроники является анализ и синтез широкополосных радиосистем и широкополосных радиосигналов. Необходимость расширения полосы частот обусловлена современными требованиями к повышению скорости передачи информации, уровня помехозащищенности и емкости радиосистем. Антенны являются одними из основных устройств в системах радиолокации, телекоммуникаций, радиотехники, следовательно, эти требования относятся и к антеннам. При конструировании антенн в настоящее время применяются новые методы, основанные на математическом аппарате дробных операторов и на понятии фрактала, введенного Б. Мандельбротом. Скейлинговые эффекты фрактальных структур позволили расширить широкополосность и многодиапазонность антенн.

Проектирование новых типов антенн потребовало создания новых математических моделей антенн. В настоящее время построение и исследование математических моделей антенн является одной из центральных проблем в анализе и синтезе антенн. В связи с бурным развитием сверхвысокочастотной (СВЧ) теории и техники требования к антеннам и топологиям антенн постоянно претерпевают изменения, и натурные эксперименты не в состоянии удовлетворить запросов потребителей. Кроме того, натурные эксперименты требуют определенного времени и, как правило, немалых затрат. Таким образом, прогресс в развитии средств теле- и радиокоммуникаций связан с методами математического моделирования. Разработка новых математических моделей антенн требует создания адекватного математического аппарата.

Среди математического аппарата, применяемого при моделировании антенн, наиболее широко используются интегральные уравнения.

При исследовании проволочных антенн большую роль играет интегральное уравнение Поклингтона [111], опубликованное в 1897 г. и до сих пор активно используемое при анализе и синтезе антенн. Исследованию антенн на основе уравнений Поклингтона и Галлена посвящено большое число работ [18]. Уравнение Поклингтона является интегральным уравнением Фредгольма первого рода и его решение является некорректной задачей. Более адекватным в физической постановке является моделирование антенн сингулярными и гиперсингулярными интегральными уравнениями первого рода. Преимущества сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений заключается также в том, что на ряде классов решений они являются корректными по Адамару. Особенно широкое применение сингулярные интегральные уравнения нашли при исследовании проволочных и полосковых антенн. Основным математическим аппаратом исследования электрических вибраторов и антенн с киральными включениями являются гиперсингулярные интегральные уравнения. Исследованию антенн методами сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений посвящено большое число работ, причем в ряде случаев получены новые классы уравнений, которые еще не полностью исследованы.

Большой вклад в разработку методов анализа и синтеза антенн был внесен отечественными учеными Е. Н. Васильевым, Д. И. Воскресенским, Д. С. Клюевым, В. А. Негановым, А. А. Потаповым, Д. М. Сазоновым, Б. В. Сестрорецким, А. Н. Тихоновым, В. П. Шестопаловым, а также зарубежными специалистами I. Anguera, N. Cohen, Y. Kim, D. L. Jaggard, C. Puente, C. T. P. Song, D. H. Wemer.

Антенны моделируются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, сингулярными и гиперсингулярными интегральными уравнениями. Решение уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей и требует применения методов регуляризации. Фундаментальные результаты в теории и практике решения некорректных задач получены А. Б. Бакушинским, В. В. Васиным, В. К. Ивановым, М. М. Лаврентьевым, В. С. Сизиковым, В. Н. Страховым, В. П. Тананой, А. Н. Тихоновым.

Активное участие в разработке приближенных методов вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов и решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений принимали И. В. Бойков, Г. М. Вайникко, И. Ц. Гохберг, В. В. Иванов, И. К. Лифанов, А. Ф. Матвеев, С. Г. Михлин, Б. И. Мусаев, Д. Г. Саникидзе, Ш. С. Хубежты, W.-T. Ang, D. Elliot, Z. K. Eshkuvatov, Du Jinyuan, B. N.Mandal, S. Prossdorf, B. Silbermann.

В последнее время активно развиваются новые направления в теории и конструировании антенн: плазменные, генетические, гравитационные антенны, и, особенно, фрактальные антенны.

Об интенсивном развитии исследований в области фрактальных антенн готовит факт создания международного проекта FRACTALCOMS, в котором начиная с 2001 г. принимают участие ученые из Каталонского политехнического института, Римского университета, Швейцарской федеральной политехнической школы, Университета Гренады, Международного центра численных методов в инженерии. В отчетах FRACTALCOMS подчеркивается необходимость в развитии численных методов моделирования фрактальных антенн.

Анализ литературных источников показывает, что тема диссертации является актуальной. Исследования в данном направлении проводятся по большей части иностранными авторами, а в России это направление представлено несколькими научными школами (в основном школой профессора А. А. Потапова).

В РФ, в Институте радиотехники и электроники (ИРЭ) им. В. А. Котельникова РАН, представителями этой школы ведутся интенсивные исследования по всевозможным применениям теории фракталов, дробных операторов и скейлинговых эффектов в радиофизических задачах.

Развитие этих исследований требует разработки нового математического аппарата, применимого к анализу и синтезу фрактальных устройств.

Таким аппаратом являются методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах, развитие которых началось в самое последнее время.

Диссертация посвящена исследованию фрактальных антенн методами гиперсингулярных интегральных уравнений. Сказанное выше определяет ее актуальность.

Целью диссертационной работы является разработка численных алгоритмов и программных продуктов для моделирования и расчета фрактальных антенн с повышенной точностью.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Модифицировать алгоритмы математического моделирования антенн, распространив существующие методы на антенны с фрактальной геометрией.

2. Разработать и обосновать алгоритмы численного решения интегральных уравнений, моделирующих распределение тока по электрическому вибратору.

3. Разработать и обосновать алгоритмы численного решения интегральных уравнений, описывающих диаграмму направленности антенны.

4. Разработать численные алгоритмы и комплекс программ для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах, возникающих при математическом моделировании фрактальных антенн.

Объектом исследования являются методы и алгоритмы моделирования и исследования антенн.

Предметом исследования являются совершенствование аналитических и численных алгоритмов анализа и синтеза антенн с фрактальной топологией.

Методы исследования. В работе использованы методы электродинамики, теории антенн, фрактальной геометрии, прикладного функционального анализа, краевых задач, теории функции комплексной переменной, теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, численные методы, методы математического моделирования.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Построены и обоснованы численные алгоритмы решения задачи распределения тока по проводнику. Разработанные численные алгоритмы отличаются от известных большей устойчивостью к возмущениям в исходных данных благодаря регуляризирующим особенностям алгоритмов, а также являются более эффективными по вычислительным и временным затратам по сравнению

с известными алгоритмами при сохранении точности расчета характеристик антенн.

2. Для решения задачи исследования характеристик антенн интегральными уравнениями Фредгольма первого рода модифицирован алгоритм локальных поправок. Разработанная модификация отличается тем, что обобщает алгоритм локальных поправок на случай фрактальной области интегрирования, что позволяет сократить вычислительные затраты на процесс решения обратной задачи синтеза антенн и обеспечить требуемую точность и достоверность результатов.

3. Разработана и обоснована методика решения гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах (в одномерном и двумерном случаях), а также на числовой оси. Методика построена по технологии коллокации и непрерывного алгоритма решения операторных уравнений, она позволяет распространить применение существующих численных алгоритмов для решения гиперсингулярных уравнений на задачи моделирования антенн с фрактальной геометрией. Методика дает более точные результаты и оптимизацию дизайна антенн для различных приложений.

4. На основе разработанных вычислительных алгоритмов и методик созданы два комплекса программ, предназначенные для исследования электродинамических характеристик антенн (распределение тока по антенне и синтез антенны с заданной диаграммой направленности) и численного решения различных видов гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих при моделировании фрактальных антенн. Разработанные комплексы программ позволяют моделировать и исследовать электродинамические характеристики фрактальных антенн с высокой точностью и эффективностью. Это дает возможность создавать новые типы антенн с улучшенными характеристиками.

Теоретическая и практическая значимость работы. Модифицированный алгоритм локальных поправок для исследования характеристик антенн интегральными уравнениями Фредгольма первого рода позволяет исследовать антенны с фрактальной топологией, что дает возможность с повышенной точностью и достоверностью находить электродинамические характеристики фрактальных антенн. Разработанные численные алгоритмы, предназначенные для изучения электродинамических характеристик антенн, демонстрируют повышенную точность и устойчивость к возмущениям по сравнению со стандартными алгоритмами. Разработанная методика решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях позволяет решать ряд задач, сводимых или приводящих к гиперсингулярным интегральным уравнениям, в частности теории антенн.

Практическая значимость работы заключается в разработке двух комплексов программ. Первый комплекс предназначен для синтезирования фрактальных антенн с заданными параметрами в первом приближении. Второй комплекс программ предназначен для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях, включая фрактальные, которые могут возникать при решении задач теории антенн.

Соответствие диссертации научной специальности: п. 2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; п. 4 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п. 8 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Достоверность и обоснованность результатов, сформулированных в диссертации, обеспечены корректным использованием математических методов и подтверждением теоретических положений результатами математического моделирования тестовых задач, корректной реализацией численных алгоритмов, использованием современных средств программирования, сравнением с результатами других научных исследований. Полученные результаты прошли апробацию на научно-технических конференциях различного ранга.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численные алгоритмы решения уравнений, моделирующих распределение тока по антенне, и уравнений, описывающих диаграмму направленности антенны,

позволяющие при сохранении точности сократить время решения и обладающие большей устойчивостью к возмущению параметров по сравнению со стандартными методами.

2. Модифицированный алгоритм локальных поправок для исследования характеристик антенн интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, обобщенный на антенны с фрактальной топологией.

3. Вычислительная методика решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях. Разработанная методика применима для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на одномерных и двумерных предфракталах, а также бесконечной числовой прямой.

4. Комплексы программ для моделирования фрактальных антенн, решения задачи распределения тока по антенне и решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях.

Реализация работы и внедрение результатов. Разработанный комплекс программ для решения задачи распределения тока по проводнику успешно использовался в одном из проектов ООО «Рубин» (г. Пенза).

Программный комплекс для приближенного решения интегральных уравнений первого рода на фракталах использован в образовательном процессе кафедры «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета, а также при выполнении проектов, в которых соискатель являлся исполнителем по гранту РФФИ № 16-01-00594 и исполнителем по ректорскому гранту ПГУ № 1/РГ от 08.04.2020. Практическое применение результатов подтверждается актами о внедрении.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на международных и всероссийских научных конференциях: Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, 2015–2018, 2023); Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых

«Ломоносов» (Москва, 2019); Международной научной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2019); Международной научной молодежной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е. В. Воскресенского» (Саранск, 2021); Международном семинаре по проектированию и технологии производства электронных средств (Прага, 2021) (в заочном формате).

Публикации. Основные результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, опубликованы в 19 научных работах, из них 11 в изданиях, рекомендованных ВАК (в том числе 3 статьи в журналах, индексируемых базами WOS/Scopus, 8 – в РИНЦ). Получены два свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты были получены автором лично либо при его непосредственном участии. Постановка цели исследования и формулировка задач были проведены автором совместно с научным руководителем. Программная реализация численных алгоритмов и решение модельных примеров выполнены автором самостоятельно. Вклад соискателя в опубликованные работы является решающим.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 138 источников и приложений. Основной объем работы – 182 страницы текста, включая 41 рисунок и 12 таблиц.

ГЛАВА 1
ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФРАКТАЛЬНЫХ АНТЕНН И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТЕНН С ФРАКТАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

1.1. Обзор антенн с фрактальной топологией

Понятие фрактала (впервые предложенное Бенцем Б. Мандельбротом [53]) в последние годы глубоко проникло во многие разделы физики и техники [8]. Особенно активно используется теория фракталов в радиоэлектронике [67].

Фракталы нашли применение во многих компьютерных технологиях, таких как шифрование, сжатие и синтез изображений и др. Фрактальная геометрия не обошла своим вниманием и теорию антенн.

Считается, что фрактальная антенна впервые была практически реализована в 1995 г. профессором Бостонского университета Н. Коэном.

Н. Коэном была доказана теорема, которая утверждает: для того чтобы антенна обладала свойством широкополосности, необходимо придать ей форму самоподобной фрактальной кривой.

Первые упоминания в научной литературе о применения фрактальных множеств при создании антенных решеток появились в работе И. Кима и Д. Л. Джаггарда [47]. Использование фрактальной геометрии в конструировании антенн позволяет эффективно реализовывать их широкополосные и многодиапазонные свойства за счет самоподобия и миниатюрности структуры.

Наиболее популярными при конструировании антенн являются, по-видимому, «снежинка» Коха и «ковер» Серпинского. Построение «ковра» Серпинского подробно описано в [48].

Фрактальным антеннам, построенным на основе топологии «ковра» Серпинского и «салфетки» Серпинского, посвящено много работ.

В статье [44] разработана сверхширокополосная фрактальная антенна на основе круглого монополя. Антенна характеризуется малыми размерами 34×28 мм^2 и сверхширокой полосой пропускания 3,09–15 ГГц. А также приведены результаты моделирования работы фрактальной антенны на основе «ковра» Серпинского (предфрактал третьего поколения). Представлены результаты моделирования: значения электромагнитной составляющей по антенне, диаграмма направленности антенны и значения коэффициента стоячей волны.

Не менее популярными являются антенны, построенные на основе фрактала – «снежинка» Коха [48].

Этот фрактал используется в миниатюрных рамочных антеннах и печатных патч-антеннах.

Одними из наиболее перспективных фракталов для конструирования антенн являются кривые Пеано, Гильберта и им подобные [48]. Это обусловлено «упаковкой» этих фракталов в ограниченное пространство.

В статье [3] дан обзор реализованных к настоящему времени видов фрактальных антенн.

В работе [74] приведен обзор фрактальных антенн, в основу конструкций которых положены кривые Коха и Минковского и «ковер» Серпинского.

Сравнительный анализ фрактальных антенн, выполненных на основе фракталов Минковского, Гильберта, Мура, Осгуда и их модификаций, проведен в статье [75].

Исследованию фрактальных антенн на предфракталах совершенного множества Кантора посвящена статья [15].

Синтез некоторых типов симметричных фрактальных антенн представлен в [108].

В работе [90] фрактальные излучатели синтезируются на основе функции Вейерштрасса

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} g(\eta^n x),$$

где $1 < D < 2$, $\eta > 1$, g – ограниченная периодическая функция; D – модифицированная фрактальная размерность.

Кольцевым фрактальным антеннам посвящена статья [6].

Фрактальные щелевые антенны на основе троичных Δ – фракталов исследованы в работе [80].

Применению метода локальных поправок к синтезу фрактальных антенн посвящена статья [14]. В ней представлены вычислительные схемы метода локальных поправок для синтеза фрактальных антенн с топологией совершенного множества Кантора и «ковра» Серпинского, приведены результаты численного моделирования диаграмм направленности.

Отметим, что многообразие классических фракталов открывает широкие конструктивные и электродинамические возможности при проектировании антенн (например, проектирование антенн на основе «кривой» Минковского [100], «салфетки» Серпинского [86, 87], «кривой» и «снежинки» Коха [112], «кривой» Гильберта [88], дерева Кейли [67]).

Наряду с классическими фракталами, к конструированию фрактальных антенн привлекаются стохастические фракталы и фрактальные деревья.

Метод быстрой аппроксимации оценок характеристик фрактального диполя Коха был представлен в работе [129].

Влияние различных типов симметрии на характеристики дипольных антенн Коха было изучено Коэном [99, 106].

Исследования антенны «салфетка» Серпинского

Наряду с антеннами, построенными на топологии совершенного множества Коха, наибольшее развитие получили антенны, основанные на фракталах Минковского.

Помимо этого, большое распространение получила фрактальная антенна, построенная на основе «салфетки» (треугольника) Серпинского. Первые работы, посвященные исследованию фрактальной антенны с геометрией «салфетки» Серпинского, были выполнены Пуэнте и др. [113, 114].

В работах [115, 131] были представлены и обобщены свойства антенны с изменением угла между стрелками монополя Серпинского.

Переходная характеристика многополосного монополя «салфетки» Серпинского была исследована в работе [98]. Зависимость диаграмм направленности монополя «салфетка» Серпинского от ее геометрии была продемонстрирована в работе [116].

Применение различных возмущений в геометрии монополей «салфетки» Серпинского для повышения их радиотехнических характеристик было представлено в работе [127]. Было обнаружено, что изменение угла антенны приводит к изменению следующих электродинамических характеристик антенны:

– смещение рабочего диапазона частот;
– изменение входного импеданса;
– изменение диаграммы направленности излучения.

В работах [95, 117] было проведено исследование быстрых итерационных сетевых моделей прогнозирования характеристик фрактальных антенн с топологией Серпинского. Предсказанное самоподобное распределение поверхностных токов на монопольной антенне Серпинского было проверено в работах [110, 103].

Измерения таких характеристик, как входной импеданс и диаграмма направленности для нескольких типов печатных фрактальных антенн, включая монополи с топологией фракталов Коха и Серпинского, проведены в работе [97].

Исследования антенн с топологией фрактальных деревьев

Древовидные фрактальные антенны начали исследовать с конца прошлого века. Первой работой, в которой были рассмотрены многополосные свойства случайных фрактальных древовидных антенн, полученных в процессе электрохимического осаждения, была статья Пуэнте и др. [118].

Широкополосность фрактальной древовидной структуры была впервые рассмотрена в работе [136]. В результате этого исследования было показано, что фрактальные древовидные антенны обладают большей полосой пропускания частот в сравнении с антеннами, построенными на основе фрактала Серпинского.

Такие свойства печатных фрактальных антенн с топологией фрактальных деревьев, как широкодиапазонность и многополостность, были изучены в работе [124]. В статье [132] были исследованы многополосные электромагнитные свойства тонкопроволочных структур, основанных на фрактальной геометрии темари-дерева.

Авторы работ [101, 102] предложили учитывать эффективное использование занимаемого пространства двумерными и трехмерными фрактальными деревьями при проектировании новых классов миниатюрных антенн.

Объемные фрактальные антенны

Для увеличения степеней конструктивной свободы плоских фрактальных антенн за счет небольшого увеличения толщины антенны в работе [133] было впервые введено понятие объемной фрактальной антенны и представлены некоторые примеры объемных фрактальных антенн, в том числе монополь «салфетки» и «ковра» Серпинского.

Разработке новой конструкции широкополосной фрактальной монопольной антенны с геометрией «ковра» Серпинского посвящена работа [128]. Было показано, что предложенная конструкция антенны дает хорошее совпадение входного импеданса во всем диапазоне частот 1–20 ГГц.

Микрополосковая патч-антенна, построенная на основе фрактала Серпинского, была рассмотрена в работе [87].

Антенны с вариациями геометрии «салфетки» Серпинского и кривой Гильберта

Двухдиапазонные конструкции, в основу которых положены вариации фрактального монополя «салфетки» Серпинского, были исследованы и представлены в работах [119, 126].

Для проектирования компактных резонансных антенн в работах [88, 130] была использована кривая Гильберта. Зависимость входного сопротивления антенны от расположения точки запитки антенны была исследована в работе [138] для фрактальной антенны с геометрией кривой Гильберта. Было показано, что правильно выбранная точка питания может обеспечить волновое сопротивление равное 50 Ом, независимо от количества итераций кривой Гилберта.

Исследование фрактальных патч-антенн

Метод синтеза многополосной микрополосковой патч-антенны с топологией Серпинского был описан в работе [96].

В работе [137] была представлена модифицированная многополосная патч-антенна с геометрией «салфетки» Серпинского.

Способ синтеза микрополосковых патч-антенн типа «бабочка», основанных на фрактале «ковер» Серпинского, был представлен в работе [86].

Статья [120] посвящена применению метода моментов для анализа фрактальных патч-антенн, основанных на фрактале «ковер» Серпинского. Исследованию характеристик излучения фрактальных микрополосковых патч-антенн с геометрией фрактала Коха-Айленда была посвящена работа [107]. Различные конфигурации миниатюрных фрактальных патч-антенн приведены в статье [101].

Комбинация генетических алгоритмов с итерационными функциональными системами

Метод объединения генетических алгоритмов с итерационными функциональными системами был использован в качестве инструмента синтеза миниатюрных многополосных фрактальных антенн в работах [134, 135].

Применению аппарата гиперсингулярных интегральных уравнений для синтеза фрактальных антенн посвящены работы [14, 15]. В них были рассмотрены антенны с геометрией предфракталов совершенного множества Кантора, «салфетки» и «ковра» Серпинского второй и третьей итерации.

1.2. Математические модели антенн

В настоящее время наибольшее распространение получили следующие математические модели антенн и фидеров:

1) аналитические модели (большой вклад в развитие этого направления был внесен В. П. Шестопаловым, Д. И. Воскресенским, А. С. Ильинским и др.);

2) модели, в основе которых лежит численное решение уравнений Максвелла, записанных в интегральной, дифференциальной или интегро-дифференциальной форме с учетом заданных граничных условий (Е. Н. Васильев, Д. М. Сазонов, В. А. Фок, R. Mittra и др);

3) модели, в основе которых лежит численное решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений (А. Н. Дементьев, Д. С. Зуев, Д. С. Клюев, И. К. Лифанов, В. А. Неганов, А. С. Ненашев, А. А. Потапов, Я. Н. Фельд, С. И. Эминов);

4) эвристические модели (Б. В. Сестрорецкий и др.), построение которых основано на упрощении физических представлений об объекте, математическая модель которого строится при использовании эвристических подходов к анализу происходящих внутри объекта физических процессов.

При этом у аналитических математических моделей есть существенные ограничения по топологии антенн и антенных систем, а также по их электродинамическим характеристикам.

Наиболее универсальным средством исследования антенн с различной топологией и электродинамическими характеристиками являются математические модели, основанные на численном решении уравнений Максвелла с заданными граничными условиями.

Эвристические модели используются либо для построений математических моделей тонкопроволочных антенных устройств и систем (чаще всего используется метод наведенных электродинамических сил или методы интегрального уравнения Галлена и интегро-дифференциального уравнения Поклингтона), либо для синтеза антенных устройств методом генетических алгоритмов. Следует отметить, что для своей реализации этот метод требует значительных затрат машинного времени, притом что зачастую невозможно предсказать, сколько времени потребуется на оптимизацию исследуемой модели.

В работе [63] была построена математическая модель проволочной антенны, основанная на решении уравнений Максвелла с заданными граничными условиями. Показано, что при переходе от уравнений Максвелла (при использованных в работе краевых условиях) к интегро-дифференциальному, а затем к интегральному уравнению получаем гиперсингулярное интегральное уравнение.

Фундаментальный обзор математических моделей антенн, основанных на аппарате сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, дан в книге [37].

В работах Д. С. Клюева и А. М. Нещерет [34, 43, 64] аппарат сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений применяется при исследовании антенн с киральными подложками.

1.3. Математические модели электрических вибраторов

Эффективность функционирования антенн зависит от топологии, конструктивных особенностей и электродинамических характеристик вибраторов, причем последние играют основную роль при эксплуатации антенн.

Задача нахождения распределения тока вдоль вибратора была впервые рассмотрена в работе C. Pocklington [111], где было построено интегро-дифференциальное уравнение, так называемое уравнение Поклингтона. Влияние Земли как проводящей среды на распространение волн вдоль вибратора было изучено Абрахамом [85].

При исследовании распределения тока по проволочной антенне получил наиболее широкое распространение метод интегральных уравнений. Этот метод позволяет моделировать электромагнитные процессы в антенне интегральными уравнениями. Интегральные уравнения получаются из уравнений Максвелла с учетом определенных граничных условий и при некоторых дополнительных ограничениях.

При различных граничных условиях получаются два разных уравнения: интегральное уравнение первого рода [2, 55] с особенностью в ядре и интегральное уравнение первого рода без особенности. Эти уравнения получили название уравнений Поклингтона.

Так как интегральные уравнения Фредгольма первого рода являются некорректными задачами, то для их численного решения необходимо проводить регуляризацию [77]. Чаще всего для регуляризации используется метод моментов, который дает возможность получить хорошее приближение некоторых интегральных характеристик антенны, но при этом значения тока можно найти только с некоторой погрешностью. Учитывая это, для получения характеристик антенн, более близких к характеристикам реальной антенны, предпочтительнее использовать интегральные уравнения с особенностью в ядре. В этом случае уравнение Поклингтона имеет особенность вида $\left(x-x_0\right)^{-2}$ при $x \to x_0$, т.е. является гиперсингулярным интегральным уравнением.

Уравнение Поклингтона прямолинейного вибратора имеет вид [70]:

$$\frac{1}{i4\pi\omega\varepsilon_a}\left(\frac{\partial}{\partial z^2}+k^2\right)\int\limits_{-l_2}^{l_1} I\left(z'\right)\frac{e^{-ikR_a}}{4\pi R_a}dz' = \begin{cases} 0, & |z| > \dfrac{b}{2}, \\ \vec{E}^b, & |z| \le \dfrac{b}{2}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $I\left(z'\right)$ – неизвестное распределение тока; E^b – напряжение генератора, возбуждающего вибратор; $R_a = \sqrt{\left(z-z'\right)^2 + a^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} / c$; ε_a и μ – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающей вибратор; ω – угловая частота; c – скорость света (рисунок 1.1).

Приближенному решению уравнения (1.1) посвящено большое число работ, в которых в большинстве своем применяются методы Галеркина и моментов [39].

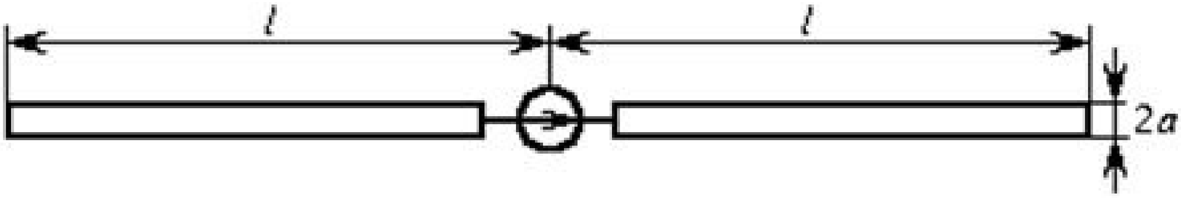


Рисунок 1.1 – Прямолинейный вибратор

Отметим, что исследования гиперсингулярных интегральных уравнений начались в последние три десятилетия прошлого века, а применительно к задачам электродинамики с 80-х гг. прошлого столетия.

В работе [89] для исследования электромагнитного поля провода произвольной формы предложена математическая модель

$$-\frac{i\eta}{k}\int_{v}\vec{J}(\vec{r}')[k^2+\nabla^2]\frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'=\vec{E}'(r), \tag{1.2}$$

где $\vec{E}'(r)$ – вектор электрического поля в наблюдаемой точке; $\vec{J}(r')$ – неизвестная плотность искомого тока; $k^2+\nabla^2$ – оператор Гельмгольца; k и η – волновое число и собственный импеданс свободного пространства: $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $\eta=\sqrt{\mu_0\varepsilon_v}$; ω – угловая частота; μ и η – магнитная и электрическая проницаемость соответственно,

$$z=\left(x_l,y_l,z_l\right),\ z'=\left(x'_l,y'_l,z'_l\right),\ \left|z-z'\right|=$$

$$=\left(\left|x-x'\right|^2+\left|y-y'\right|^2+\left|z-z'\right|^2\right)^{1/2}.$$

Для вибратора произвольной формы уравнение (1.2) в предельной форме принимает вид

$$-\frac{i}{\omega\varepsilon}\int_{s'}I_s(s')[k^2(\vec{s}\cdot\vec{s}')+\frac{\partial}{\partial s\partial s'}]\frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}ds'=\vec{E}_s^l(r), \tag{1.3}$$

где E_s^l – тангенциальная составляющая электрического поля; s,s' – нормали к поверхности в точках r и r', $k^2(\vec{s}\cdot\vec{s}')+\dfrac{\partial}{\partial s\partial s'}$ – оператор Гельмгольца.

Уравнение (1.3) являются гиперсингулярным интегральным уравнением.

Несмотря на то, что уравнение (1.3) не имеет физического смысла, представляет интерес с точки зрения вычислительной математики численное исследование подобных гиперсингулярных интегральных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} I_z(\tau)\frac{e^{ik|t-\tau|}}{|t-\tau|}d\tau = \vec{E}_z(t), \qquad (1.4)$$

где $\vec{E}_z(t)$ – продольная составляющая вектора электрического поля, создаваемого неизвестным распределением тока $I_z(z)$, умноженная на соответствующую константу, $2l$ – длина вибратора. В главе 4 проведено сравнение решений уравнения (1.3) с решениями уравнения (1.1) при различных значениях параметра a.

При этом очевидно, что моделирование электрического вибратора при значениях параметра a, равных нулю, не имеет физического обоснования, так как расстояние между линией тока и источником возбуждения должно быть не меньше, чем 0,5 диаметра электрона. Таким образом, минимальное значение a приблизительно должно быть равным $0,5\cdot 4,4605\cdot 10^{-17}$.

В главе 4 (разд. 4.6) было приближенно решено уравнение (1.1) при значениях $\frac{l}{\lambda}=0,5$, и $\frac{l}{\lambda}=1,5$. Также рассмотрены случаи $a=10^{-9}$, $\frac{l}{\lambda}=0,5$ и $a=0$, $\frac{l}{\lambda}=1$.

Для уравнения (1.4) рассмотрены следующие значения параметров:

- $\frac{l}{\lambda}=0,66$, $\frac{a}{l}=0,0007475$;
- $\frac{l}{\lambda}=0,5$; $\frac{a}{l}=0,0007475$;
- $a=0,14999$; $\frac{l}{\lambda}=0,5126$; $\frac{a}{l}=0,0007475$;
- $a=0,014999$; $\frac{l}{\lambda}=0,5126$; $\frac{a}{l}=0,0007475$;
- $a=10^{-9}$; $\frac{l}{\lambda}=1$; $\frac{a}{l}=2,5\cdot 10^{-8}$;
- $a=0$; $\frac{l}{\lambda}=0,5128$; $\frac{a}{l}=0$.

В связи с отсутствием равномерной сходимости при $a=0$ качественные картины решений, получаемых при $a = 10^{-9}$ и $a=0$, принципиально отличаются друг от друга, из чего следует, что уравнение (1.3) нельзя даже формально рассматривать как предел последовательности уравнений (1.1) при параметре a, стремящемся к нулю.

Уравнение (1.4) представляет интерес в связи с нестандартным определением сингулярности ($|t-\tau|$ вместо стандартного $(t-\tau)$). Ниже построена и обоснована вычислительная схема приближенного решения этого уравнения.

В работе [123] метод моментов применяется для решения уравнения Поклингтона линейной антенны:

$$\int_{-1/2}^{1/2} I(z')\left[\frac{\partial}{\partial z^2}+k^2\right]\frac{e^{-ikR_a}}{4\pi R_a}dz' = i\omega\varepsilon\vec{E}_z(z), \tag{1.5}$$

где $R_a = \sqrt{a^2+(z-z')^2}$.

В работах [58, 60, 61], показано, что физически корректной является математическая модель произвольного вибратора, представленная сингулярным интегральным уравнением первого рода.

Теоретические исследования электродинамических характеристик фрактальных структур впервые были опубликованы в 1980-е гг. Это были публикации Я. Кима и Д. Джаггарда [47] и C. Puente [121, 122]. Фрактальный подход к задачам радиотехники и радиофизики развивается в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН начиная с 1987 г., школой А. А. Потапова. В рамках этого подхода были построены новые информационные технологии, основанные на использовании фрактальных (дробных) мер и использующие принципы нелинейной динамики. Был введен термин «фрактальные радиосистемы», а также появилось новое научное направление – применение теории динамических систем и фрактальной геометрии к задачам проектирования радиосистем различного назначения [67]. Кроме этого, были разработаны методы обобщенной фрактальной фильтрации [66]. Впоследствии в научный обиход был введен термин «фрактальные радиосистемы» [67].

В течение последних двух-трех десятилетий наблюдается бурно возрастающий интерес к построению и исследованию фрактальных антенн.

В ходе экспериментов с фрактальными антенными было показано, что они при меньших размерах дают тот же коэффициент усиления, что и обычные. Это чрезвычайно важно для мобильной техники.

Из сказанного следует актуальность исследования аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

1.4. Излучение проволочной антенны

В данном разделе представлена на примере проволочной антенны методика моделирования антенн и фидеров гиперсингулярными интегральными уравнениями.

Как было показано И. К. Лифановым и А. С. Ненашевым [63], математическая модель проволочной антенны описывается гиперсингулярным интегральным уравнением.

Для описания связи между теорией антенн и гиперсингулярными интегральными уравнениями кратко представим приведенное в [63] исследование.

1.4.1. Интегральное уравнение проволочной антенны

При построении математической модели проволочной антенны в [63] сделаны некоторые допущения: поверхность провода S является идеально проводящей, его радиус равен ρ, а образующая L является гладкой и не имеет точек самопересечений (рисунок 1.2):

$$x = x(l),\ y = y(l),\ z = z(l);$$
$$x(l),\ y(l),\ z(l) \in C^4,\ l \in [a,b].$$

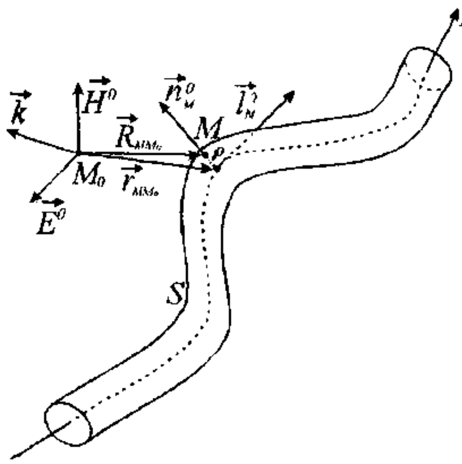


Рисунок 1.2 – Задача рассеяния электромагнитной волны
на идеально проводящей поверхности провода

Будем рассматривать задачу рассеяния электромагнитной волны на поверхности этого провода.

Для того чтобы найти рассеянное поле $\vec{E}^S(M_0)$, нужно решить уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{E}^S(M_0) + k^2 \vec{E}^S(M_0) = 0,\ M_0 \in R^3 / S, \tag{1.6}$$

с граничным условием на поверхности S

$$\vec{n}^0_{M_0} \times \vec{E}^S(M_0) = -\vec{n}^0_{M_0} \times \vec{E}^0(M_0),\ M_0 \in S, \tag{1.7}$$

и условием излучения на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} R\left(\frac{\partial}{\partial R} \vec{E}^S + ik\vec{E}^S \right) = 0. \tag{1.8}$$

Решение уравнения (1.6) ищется [42] в виде

$$\vec{E}^S(M_0) = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left(k^2 \int_S \frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}} \vec{j}(M)\, ds_M + \right.$$

$$\left. + \int_S \left(\vec{j}(M) \cdot \nabla_M \right) \nabla_M \frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}} ds_M \right), \tag{1.9}$$

где через R_{MM_0} обозначено расстояние между двумя точками M и M_0; $\vec{j}(M)$ – плотность поверхностного тока в точке M; ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; ω – круговая частота колебаний; ds_M – дифференциал площади поверхности провода в точке M.

Векторное интегральное уравнение относительно поверхностной плотности наведенных токов имеет вид

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon}\vec{n}_{M_0}\times\left(k^2\int_S\frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}\vec{j}\,ds_M+\int_S\left(\vec{j}\cdot\nabla_M\right)\nabla_M\frac{e^{-ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}ds_M=\right. \qquad (1.10)$$

$$=-\vec{n}^0_{M_0}\times\vec{E}^0(M_0),\ M_0\in S.$$

Уравнение (1.10) обладает сингулярной особенностью 2-го порядка, т.е. является гиперсингулярным интегральным уравнением.

В работе [63] показано, что уравнение (1.10) сводится к одномерному скалярному уравнению

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon}\int_a^b I(l)\left(\frac{\partial^2}{\partial l_0\partial l}-\left(\vec{l}^{\,0}(l_0)\cdot\vec{l}^{\,0}(l)\right)k^2\right)K(l,l_0)\,dl=E_l^0(l_0),\ l_0\in[a,b], \qquad (1.11)$$

где $I(l)=p\int\limits_0^{2\pi}j(l,\varphi)\,d\varphi$ – амплитуда полного тока,

$$K(l,l_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ik\hat{R}_{MM_0}}}{\hat{R}_{MM_0}}d\psi,\ \hat{R}_{MM_0}=\sqrt{r^2_{MM_0}+2p^2(1-\cos(\varphi-\varphi_0))}. \qquad (1.12)$$

При исследовании ядра уравнения (1.11) в [63] было показано, что уравнение (1.11) является гиперсингулярным.

Для гиперсингулярных интегральных уравнений (1.10) и (1.11) не известны точные аналитические решения.

Из приведенного выше исследования следует необходимость разработки численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

Особенность ядра интегрального уравнения

В работе [63] исследована особенность функции $K(l,l_0)$:

$$K\left(l,l_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ik\hat{R}_{MM_0}}}{\hat{R}_{MM_0}}d\psi. \tag{1.13}$$

Утверждение 1.1 [63]. При $l \to l_0$ функция $K\left(l,l_0\right)$ (1.13) имеет логарифмическую особенность, а ее первая и вторая частные производные по l и l_0 имеют соответственно сингулярную и гиперсингулярную особенности следующего вида:

$$K\left(l,l_0\right)=\frac{1}{2\pi\rho}\ln\left(\frac{\left(l-l_0\right)^2}{2\rho^2}\right)+A_1\left(l,l_0\right), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}K\left(l,l_0\right)=\frac{1}{\pi\rho\left(l-l_0\right)}+A_2\left(l,l_0\right), \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l\partial l_0}K\left(l,l_0\right)=-\frac{1}{\pi\rho\left(l-l_0\right)^2}+A_3\left(l,l_0\right), \tag{1.16}$$

где $A_1\left(l,l_0\right),\ A_2\left(l,l_0\right)\in C^0\ A_3\left(l,l_0\right)\in L_1,\ \forall l,l_0\in[a,b].$

В работе [63] показано, что уравнение (1.11) имеет в ядре гиперсингулярную особенностью второго порядка.

1.4.2. Модели источников питания

Анализ излучающих проволочных антенн представляет не меньший (а то и больший) интерес по сравнению с задачей расчета рассеяния электромагнитной волны на проволочной антенне. Чтобы решить эту задачу, можно воспользоваться уравнением (1.13) с использованием в качестве стороннего поля $E^0\left(l_0\right)$, где $E^0\left(l_0\right)$ – поле источника питания антенны. От выбора физической модели источника питания будет зависеть решение уравнения около точки запитки антенны, и, следовательно, будут различаться методы расчета характеристик антенны. Поэтому рассмотрим этот вопрос подробнее.

Для упрощения расчетных формул в [63] сделано несколько допущений:

- Первое – точка приложения питания – $x=0,\ y=0,\ z=0,\ l=0.$

- Второе – в пределах зоны затухания поля источника $\vec{l}^{\,0}=\vec{z}^{\,0}$, где $\vec{l}^{\,0}$ один из векторов трехгранника Френе на поверхности провода.

При решении задачи об излучении проволочной антенны можно исходить из двух моделей источников питания: источника электродвижущей силы (ЭДС) и источника тока [42]. На рисунке 1.3 показана модель источника ЭДС.

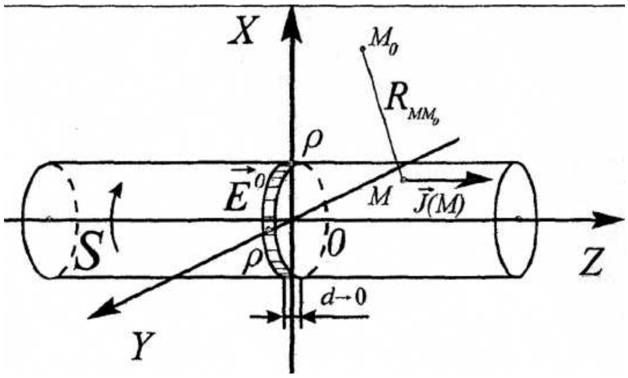


Рисунок 1.3 – Модель источника ЭДС

Будем считать, что возбуждающее поле было приложено в небольшом кольцевом зазоре толщиной d, причем провод в этом месте не имеет разрыва.

При построении математической модели поле в зоне зазора можно считать постоянным, так как ширина возбуждающего зазора мала по сравнению с длиной волны (т.е. $d \ll \lambda$).

Следовательно, возбуждающее поле принимает следующий вид:

$$\vec{E}^0=\begin{cases}0, & |l_0|>\dfrac{d}{2},\\ -\dfrac{U_0}{d}\vec{z}^{\,0}, & |l_0|\le\dfrac{d}{2},\end{cases} \tag{1.17}$$

где U_0 – ЭДС генератора.

Если ширину зазора уменьшить, то возбуждающее поле будет стремиться к дельта-функции: $\vec{E}^0=-U_0\delta\left(l_0\right)\vec{z}^{\,0}$.

Следовательно, продольная компонента возбуждающего поля выражается следующим образом:

$$\vec{E}^0 = -U_0\delta(l_0) \ . \quad (1.18)$$

Характеристическим для интегрального уравнения проволочной антенны (1.11) с правой частью (1.18) будет уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_U(x)}{(x-x_0)^2}dx = \delta(x_0 - q). \quad (1.19)$$

Решение этого уравнения существует, но при этом функция $g_U(x)$ обладает логарифмической особенность в точке q . Следовательно, уравнение (1.11) с правой частью (1.19) для расчета характеристик антенны (значение тока) будет иметь логарифмическую особенность в точке питания, что физически не реализуемо. Подобная особенность поведения тока затрудняет расчет входного сопротивления антенны.

Рассмотрим другую модель источника питания. Пусть антенна запитывается генератором тока (рисунок 1.4).

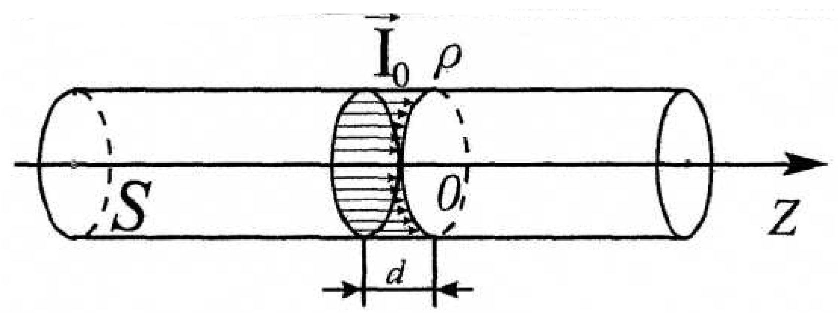


Рисунок 1.4 – Источник тока

Так как ширина зазора значительно меньше длины волны (т.е. $d \ll \lambda$), то систему питания двухпроводной линией можно заменить элементарным диполем того же радиуса и с зазором питания такой же ширины, как и в самой антенне. Вдоль диполя ток распределяется равномерно, и его значение равно току питающего генератора I_0 . При этом в точке питания антенны имеет место разрыв шириной d между клеммами питания.

В работе [63] показано, что характеристическим уравнением для уравнения проволочной антенны (1.11) с правой частью (1.17) будет уравнение следующего вида:

$$\int_{-1}^{1} \frac{g_1(x)}{(x-x_0)^2}\,dx = \frac{1}{x_0-q}. \tag{1.20}$$

Это уравнение было решено в работе [63]. Было доказано, что функция $g_1(x)$ имеет точку конечного разрыва в точке q. Следовательно, решение уравнения (1.11) с правой частью, описывающей поле источника тока

$$\vec{E}_l^{\,0}(l_0) = \frac{I_0}{i\omega\varepsilon}\cdot\left(k^2\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} K(l,l_0)\,dl - \frac{\partial}{\partial l_0}K\left(\frac{d}{2},l_0\right) + \frac{\partial}{\partial l_0}K\left(-\frac{d}{2},l_0\right)\right) \tag{1.21}$$

будет иметь скачки первого рода в точках $l=\pm\dfrac{d}{2}$. Такое поведение решения в точках питания имеет определенный физический смысл.

1.4.3. Уравнение проволочной антенны с учетом источника питания

После того как был выбран источник питания, запишем интегральное уравнение проволочной антенны при возбуждении источником тока, описанным в предыдущем пункте:

$$\int\limits_{[a,b]\backslash\left(-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)} I(l)\left(\frac{\partial^2}{\partial l_0 \partial l} - \left(\vec{l}^{\,0}(l_0)\cdot\vec{l}^{\,0}(l)\right)k^2\right)K(l,l_0)\,dl =$$

$$= I_0\cdot\left(k^2\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} K(l,l_0)\,dl - \frac{\partial}{\partial l_0}K\left(\frac{d}{2},l_0\right) + \frac{\partial}{\partial l_0}K\left(-\frac{d}{2},l_0\right)\right), \tag{1.22}$$

$$I(a) = I\left(-\frac{d}{2}\right) = I\left(\frac{d}{2}\right) = I(b) = 0,\;\; l_0\in[a,b]\backslash\left(-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right).$$

Полученное уравнение имеет сингулярную особенность в точках $l = -\frac{d}{2}$ и $l = \frac{d}{2}$ в правой части уравнения. Поэтому численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения с сингулярной правой частью терпит разрыв первого рода в точке сингулярности [63].

Утверждение 1.2 [63]. Решение уравнения (1.22) терпит разрыв первого рода величиной $\left(-I_0\right)$ в точке $l = -\frac{d}{2}$ и величиной I_0 в точке $l = \frac{d}{2}$.

Это утверждение соответствует первому закону Кирхгофа, так как в точках приложения питания присутствует сторонний ток величиной I_0. Поэтому использование источника тока при построении математической модели антенны отвечает физике процесса.

Выше было представлено построение математической модели проволочной антенны. Даже при сделанных существенных упрощениях модели антенны и фидера описываются достаточно сложными гиперсингулярными интегральными уравнениями.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) необходима разработка численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Так как ядро гиперсингулярного интегрального уравнения (1.22) имеет сложную структуру, то, по-видимому, наиболее приемлемыми являются методы коллокации и механических квадратур. Методы Бубнова – Галеркина и моментов требуют большой дополнительной технической работы;

2) так как физическая реализация δ-функции невозможна, то представляет значительный интерес исследование уравнения вида (1.19) при правой части в виде δ-образной функции;

3) так как физическая реализация функции $\dfrac{1}{x_0 - q}$ невозможна, то представляет значительный интерес исследование уравнения вида (1.17) при аппроксимации функции $\dfrac{1}{x_0 - q}$ функцией вида

$$\varphi(x,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-q}, \ x \in [-1, q-\eta) \cup (q+\eta, 1], \\ \dfrac{1}{\eta}, \ x \in [q-\eta, q+\eta]. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Построению и обоснованию вычислительных схем методов коллокации и механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений теории антенн посвящена глава 3.

1.4.4 Диаграмма направленности

Для любой антенны, в частности и фрактальной, одним из важнейших параметров является ее диаграмма направленности (рисунок 1.5). Приведем ее определение [2].

При расчете любой излучающей системы необходимо исследовать область поля индукции и область поля излучения. Так как поле индукции убывает достаточно быстро (быстрее, чем $1/R$, где R – расстояние от источника до исследуемого объекта), то оно представляет интерес только в окрестности излучателя. Поле излучения (оно убывает как $1/R$) характеризует поток энергии, текущий в направлении от антенны. Теоретически исследование поля излучения сводится к решению уравнений Максвелла с граничными условиями, определяемыми конструкцией антенны. Однако решение такой граничной задачи чрезвычайно сложно и, как правило, ее решают приближенно, пользуясь принципом Кирхгофа. Согласно принципу Кирхгофа источник излучения окружается ограниченной замкнутой поверхностью, на которой индуцируются вторичные источники. Поле излучения в дальней области определяется как суперпозиция излучений вторичных источников.

В случае фрактальной антенны, составленной из источников излучения, расположенных на элементах фрактала (скажем, фрактал «ковер» Серпинского) можно считать, что излучающей поверхностью каждого источника излучения является плоскость. В этом случае величина поля в точке P, достаточно удаленной от раскрыва антенны, определяется следующей формулой [2]:

$$E_m(P)=\frac{i}{2\pi\lambda}\frac{e^{-ikR}}{R}\cos\theta\int\limits_{\sigma}E_m(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta, \tag{1.24}$$

где $E_m(P)$ $(m=1,2,3)$ – одна из компонент напряженности электрического или магнитного поля в прямоугольной системе координат с центром в точке O на плоскости раскрыва; $E_M(\zeta,\eta)$ – соответствующая компонента в раскрыве; R,θ,ϕ – координаты точки P в сферической системе координат с центром в точке O, k_1,k_2 – составляющие волнового вектора $k(|k|=2\pi/\lambda)$, $k_1=|k|\sin\theta\cos\phi$, $k_2=|k|\sin\theta\sin\phi$; σ – поверхность раскрыва, λ – длина волны. Здесь k_1 – составляющая вектора k относительно оси Ox, k_2 – относительно оси Oy.

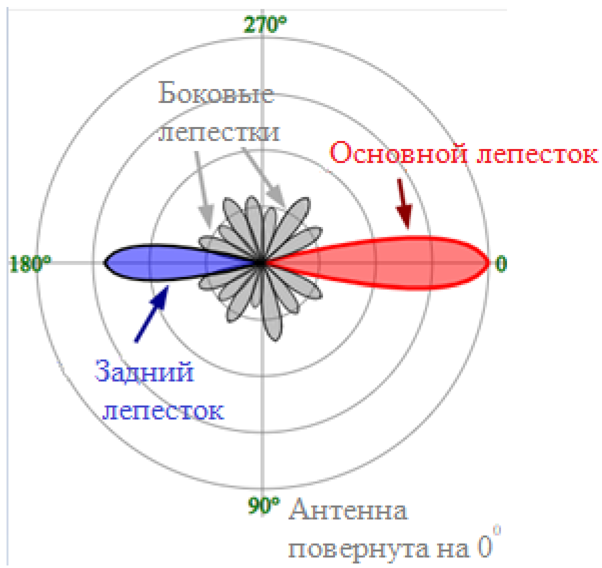


Рисунок 1.5 – Диаграмма направленности в дальней области

Если антенна фокусирует излучение в узком конусе вокруг направления распространения $(\cos\theta\approx1)$, то

$$E_m(P) = \frac{i}{2\pi\lambda}\frac{e^{-ikR_a}}{R_a}\int\limits_{\sigma} E_m(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta. \tag{1.25}$$

Диаграмма направленности антенны вводится формулой

$$f(\theta,\phi) = AE_m(P)e^{ikR}R, \tag{1.26}$$

где коэффициент A подбирается таким образом, чтобы максимальное значение $|f(\theta,\phi)|$ равнялось единице. Таким образом, диаграмма направленности определяется формулой

$$f(\theta,\phi) = \int\limits_{\sigma} F(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta, \tag{1.27}$$

где $F(\zeta,\eta)$ – распределение поля в раскрыве антенны, и нормируется таким образом, чтобы

$$\max_{0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi} |f(\theta,\phi)| = 1.$$

После введения функции [2]:

$$g(\zeta,\eta) = \begin{cases} F(\zeta,\eta), (\zeta,\eta)\in\sigma, \\ 0, (\zeta,\eta)\in E_2\setminus\sigma, \end{cases} \tag{1.28}$$

диаграмма направленности описывается формулой

$$f(\theta,\phi) = \int\limits_{E_2} g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta, \tag{1.29}$$

т.е. диаграмма направленности является преобразованием Фурье поля в раскрыве антенны.

Более естественным является описание диаграммы направленности через составляющие волнового вектора: $h(k_1,k_2) = f(\theta,\phi)$, тогда

$$h(k_1,k_2) = \int\limits_{\sigma} F(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta = \int\limits_{E_2}\int g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta. \tag{1.30}$$

Не менее важной характеристикой антенны является ее мощность, определяемая формулой

$$P_{full} = \int_{\sigma} |F(\zeta,\eta)|^2 \, d\zeta d\eta.$$

Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$P_{full} = \int_{\sigma} |F(\zeta,\eta)|^2 \, d\zeta d\eta = \int\int_{E_2} |g(\zeta,\eta)|^2 \, d\zeta d\eta = \int\int_{E_2} |h(k_1,k_2)|^2 \, dk_1 dk_2 . \qquad (1.31)$$

В случае, если излучение в дальнюю зону происходит в направлении, определяемом включением $(k_1,k_2)\in\Delta,$ то оно определяется выражением

$$P_{radiation} = \iint_{\Delta} |h(k_1,k_2)|^2 \, dk_1 dk_2. \qquad (1.32)$$

Разность $P_{reactive} = P_{full} - P_{radiation}$ называется реактивной мощностью.

Важной характеристикой качества антенны является ее коэффициент стоячей волны (КСВ): отношение мощности, которая распространяется от кабеля к антенне, к мощности, которая возвращается по кабелю, отражаясь от антенны. Это отражение обусловлено тем, что сопротивление антенны не равно сопротивлению кабеля. Коэффициент стоячей волны рассчитывается по формуле: КСВ = $(W_1+W_2)/(W_1-W_2),$ где W_1 – мощность падающей волны; W_2 – мощность отраженной волны. Идеальное значение КСВ, которое на практике никогда не достигается, равно единице. Приемлемыми считаются значения от 1,2 до 2,0. Допустимые значения КСВ для различных радиотехнических устройств регламентированы соответствующими техническими заданиями и ГОСТами. Формула (1.30) является удобной при численном синтезе антенн.

1.5. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов и решения гиперсингулярных интегральных уравнений

Одномерные гиперсингулярные интегралы

Гиперсингулярные интегралы были введены Ж. Адамаром при исследовании уравнений в частных производных гиперболического типа. В течение долгого времени они не находили применения при решении прикладных задач. Ситуация изменилась в середине прошлого века, когда гиперсингулярные интегралы нашли применение в задачах аэродинамики [62], а затем и в других областях физики и техники. К решению задач дифракции гиперсингулярные интегралы привлекаются начиная с 70-х гг. прошлого века [55].

Пусть функция $A(x)$ такова, что для нее существует p-я производная в окрестности точки b.

Определение 1.1 [1, 105]. Гиперсингулярным интегралом называется интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}, \ p \in N, \ 0 < \alpha < 1, \tag{1.33}$$

который определяется пределом

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}} = \lim_{x \to b} \left(\int_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}} \right), \tag{1.34}$$

где $B(x) \in W^p H_\alpha$ – любая функция, при которой данный предел существует.

Определение 1.2 [83]. Интегралом в смысле главного значения по Коши – Адамару называется интеграл

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a < c < b, \tag{1.35}$$

который определяется предельным выражением:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \to 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right], \tag{1.36}$$

где $\xi(v) \in W^p$ – любая функция, обеспечивающая существование предела.

Гиперсингулярный интеграл в концевых точках a и b определяется следующим образом.

Определение 1.3. Гиперсингулярным интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v)\ln|v|\right], \tag{1.37}$$

где $\xi(v)\in W^p H_\alpha$; $\xi_1(v)$ – функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ подбираются так, чтобы указанный предел существовал.

Определение 1.4. Гиперсингулярным интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(z')dz'}{|z-z'|}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(z')dz'}{|z-z'|} = \lim_{v\to 0}\left[\int_a^{z-v} \frac{\varphi(z')dz'}{|z-z'|} + \int_{z+v}^b \frac{\varphi(z')dz'}{|z-z'|} + \xi(v)\ln|v|\right] = \tag{1.38}$$

$$= \lim_{v\to 0}\left[\int_a^{z-v} \frac{\varphi(z')dz'}{z-z'} + \int_{z+v}^b \frac{\varphi(z')dz'}{z'-z} + \xi(v)\ln|v|\right],$$

где $\xi(v)\in W^p H_\alpha$; $\xi_1(v)$ – функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ подбираются так, чтобы указанный предел существовал.

Многомерные гиперсингулярные интегралы

Понятие многомерных гиперсингулярных интегралов было введено Ж. Адамаром в работах [1, 105]. В диссертации используется следующее определение гиперсингулярного интеграла.

Рассмотрим интеграл

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}}, \tag{1.39}$$

где $T=[0,1]^2$, $p=1,2,\dots$, $0<\alpha<1$.

Пусть $T_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=[\varepsilon_1,1;\varepsilon_2,1],\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0.$

Определение 1.5 [12]. Многомерный гиперсингулярный интеграл (1.39) определяется формулой

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0}\left[\int\limits_{T_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\int \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}}+\frac{B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{p+\alpha-1}\varepsilon_2^{p+\alpha-1}}\right], \tag{1.40}$$

$p=1,2,...,\quad 0<\alpha<1,$

где $B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in W^{p,p}H_{\alpha,\alpha}$ и предел существует.

Введем область $T_\varepsilon=[\varepsilon,1;\varepsilon,1],\ \varepsilon>0.$

Определение 1.6 [12]. Многомерный гиперсингулярный интеграл $\iint\limits_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p}$ определяется формулой

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{T_\varepsilon}\frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p}+\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-2}}+C(\varepsilon)\ln(\varepsilon)+D(\varepsilon)\ln^2(\varepsilon)\right],$$

$$p=2,3,\ldots, \tag{1.41}$$

где $B(\varepsilon)\in W^{2p-1}$, функции $C(\varepsilon)\in W^1,\ D(\varepsilon)\in W^1$ и предел существует.

Дадим определение полигиперсингулярных интегралов с переменными сингулярностями

$$B\varphi=\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}.$$

Построим окружность, пересекающую контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1'', с центром в точке t_1 малого радиуса ρ_1. Обозначим через l_1 часть контура, заключенную между точками t_1' и t_1''.

Проведя аналогичное построение для контура γ_2, получим контур l_2 заключенный между точками t_2' и t_2''.

Тогда интеграл $B\varphi$ определяется формулой

$$B\varphi = \lim_{\rho_1\to 0,\rho_2\to 0}\left[\int\limits_{\gamma_1\setminus l_1}\int\limits_{\gamma_2\setminus l_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} - \frac{\Gamma(\rho_1,\rho_2)}{\rho_1^{p_1-1}\rho_2^{p_2-1}}\right],$$

где $\Gamma(\rho_1,\rho_2)\in W^{p-1,p-1}H_{\alpha,\alpha}$, предел существует и является единственным.

Рассмотрим двумерный гиперсингулярный интеграл со степенной особенностью

$$L\varphi \equiv \iint\limits_G \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где $(t_1,t_2)\in G,\ p\ge 3$.

Пусть $R(t,\varepsilon),\ t=(t_1,t_2)$ – круг радиуса ε с центром в точке t.

Определение 1.7 [12]. Регуляризацией интеграла $L\varphi$ является предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{G\setminus R(t,\varepsilon)}\int \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - C(\varepsilon)\ln\varepsilon\right),$$

где $B(x)\in W^{p-2}H_\alpha$, $C(x)\in W^1$ и подбирается так, чтобы предел существовал.

Приближенное вычисление сингулярных и гиперсингулярных интегралов

Сингулярные и гиперсингулярные интегралы широко применяются во многих областях физики и техники: теории антенн, технике СВЧ, теории упругости, электродинамике, аэродинамике и др.

Начиная с 1950 г. [79] к исследованию антенн различной структуры привлекаются сингулярные интегралы, а в последние декады – и гиперсингулярные интегралы [35]. В основном используются интегралы следующих видов:

$$\int_{-l}^{l}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau, \tag{1.42}$$

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t)^2+(\tau_2+t)^2}d\tau, \tag{1.43}$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, \tag{1.44}$$

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left((\tau_1-t)^2+(\tau_2+t)^2\right)^{p/2}},\ p=3,4,... \qquad (1.45)$$

Вычисление этих интегралов в аналитическом виде (в виде конечных сумм элементарных функций) возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому для использования сингулярных интегралов при решении теоретических и прикладных задач в электротехнике, теории СВЧ, анализе и синтезе антенн приходится применять приближенные методы [19, 33]. В настоящее время приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов на гладких контурах достаточно хорошо исследованы. Основные алгоритмы и оценки их точности представлены в монографиях И. В. Бойкова [11, 12].

При этом необходимо отметить, что отсутствуют аналитические и приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов на фракталах. Такие методы необходимы при разработке фрактальных антенн.

Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений

Теория сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) получила свое начало в работах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, опубликованных в начале XX столетия, и активно развивалась в течение всего прошлого века [71, 72]. Фундаментальные результаты по теории с.и.у. представлены в монографиях Ф. Д. Гахова [39], И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана [41], С. Г. Михлина [56], С. Г. Михлина и З. Пресдорфа [109], Н. И. Мусхелишвили [57], З. Пресдорфа [68] и др.

Несмотря на активное развитие с.и.у., многие разделы еще не исследованы. В первую очередь это относится к теории и численным методам решения с.и.у. на фракталах.

Гиперсингулярные интегралы были введены Ж. Адамаром [1] при исследовании задачи Коши для уравнений в частных производных гиперболического типа.

В течение долгого времени гиперсингулярные интегралы не привлекали большого внимания математиков. Но все изменилось в середине прошлого века, когда были обнаружены применения гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) вначале к аэродинамике [7, 62, 84], а затем к электродинамике [55], теории упругости [38, 49, 50], радиотехнике [63, 67], ядерной физике [54], геофизике [69], теории антенн [63, 94] и теории композитных материалов и наноматериалов [36].

Точное решение гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях.

В связи с этим возникает необходимость в разработке приближенных методов их решения [16, 17, 26, 125].

В теории антенн наиболее активно используются гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода [22]. Это, в первую очередь, связано с конструктивными особенностями антенн. Для приближенного решения этих уравнений применяется в основном метод ортогональных рядов. В настоящее время приближенные методы построены для широких классов гиперсингулярных интегральных уравнений, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений. Подробные обзоры приближенных методов содержатся в монографии [29], обзорах [9, 30] и работах [28, 91, 92].

В последние годы в связи с развитием фрактальных антенн возникла необходимость в разработке приближенных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах. В этом направлении сделаны первые шаги: построены и обоснованы приближенные методы решения с.и.у. и г.и.у. на предфракталах «ковра» Серпинского, «снежинки» Коха, развертки Гильберта [4, 20, 21, 23–25, 27, 28].

1.6. Вспомогательные сведения

Утверждение 1.3 (теорема Адамара) [52]. Если модуль каждого диагонального элемента матрицы A размерности $n \times n$ превосходит сумму моделей остальных элементов этой строки, т.е. выполняются неравенства

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}\right|,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

то матрица A является невырожденной.

Определение 1.8 [51]. Логарифмической нормой оператора A называется предел

$$\Lambda(A) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h},$$

где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Утверждение 1.4 (теорема Лозинского) [51]. Если $\Lambda(A) < 0$, то матрица A неособенная, и справедлива оценка

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{\left|\Lambda(A)\right|},$$

где $\Lambda(A)$ – логарифмическая норма матрицы A.

Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \tag{1.46}$$

в котором нелинейный оператор $A(x)$ действует из банахова пространства X в банахово пространство X .

Уравнению (1.55) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f(x), \tag{1.47}$$

$$x(0) = x_0. \tag{1.48}$$

Справедливо следующее утверждение [10].

Утверждение 1.5. Пусть уравнение (1.55) имеет решение x^*, и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B\left(x^*, r\right)$, выполняются следующие условия:

1) при любом $t\ (t > 0)$ выполняется неравенство $\int\limits_0^t \Lambda\left(A'\left(g(\tau)\right)\right) d\tau \le 0$;

2) справедливо неравенство $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda\Big(A'\big(g(\tau)\big)\Big)d\tau \le -\alpha_g,\ \alpha_g > 0$.

Тогда решение задачи Коши (1.47)–(1.48) при $t\to\infty$ сходится к решению x^* уравнения (1.46).

В случае если условия утверждения 1.5 не выполняются, то необходима регуляризация.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\Big(A'\big(x(t)\big)^* A\big(x(t)\big) - A'\big(x(t)\big)^* f(x)\Big), \tag{1.49}$$

$$x(0) = x_0, \tag{1.50}$$

где $A'\big(x(t)\big)^*$ – оператор, сопряженный к $A'\big(x(t)\big)$.

Так как производная по Фреше (Гато) неотрицательна, то можно получить следующие утверждения.

Утверждение 1.6. Пусть на любой дифференцируемой кривой $\varphi(t)$, расположенной в шаре $B\left(x^*, r\right)$, выполняются следующие условия:

1) при любом t $(t > 0)$ выполняется неравенство

$$-\int\limits_0^t A'\big(\varphi(\tau)\big)^* A'\big(\varphi(\tau)\big)d\tau \le 0;$$

2) справедливо неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda\Big(A'\big(\varphi(t)\big)^* A'\big(\varphi(\tau)\big)\Big)d\tau = -\beta,\ \beta > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (1.49)–(1.50) при $t\to\infty$ сходится к решению x^* уравнения (1.46).

В главе 4 на модельных примерах продемонстрировано, что непрерывный операторный метод обладает высокой устойчивостью и скоростью сходимости. Показана эффективность непрерывного операторного метода по сравнению со стандартными алгоритмами, содержащимися в средах MAPLE, MATLAB.

Показана эффективность непрерывного операторного метода при решении уравнений Поклингтона и Галлена на спектре. В этой ситуации стандартные алгоритмы, содержащие в средах MAPLE, MATLAB, неприменимы.

Общие вычислительные затраты непрерывного операторного метода, следующие:

$$Q(n) = N\_iter * \left(3N^2 + N\right), \tag{1.51}$$

где N_iter – число итераций при решении задачи Коши (1.47)–(1.48) (или (1.49)–(1.50)).

Таким образом, при большом числе узлов и высокой скорости сходимости, данный метод становится эффективнее других методов решения интегральных уравнений. Увеличение скорости сходимости возможно за счет выбора начального приближения, изменения шага при решении системы дифференциальных уравнений или применения различных методов решения систем дифференциальных уравнений.

В главе 4 приведены результаты решения интегрального уравнения на спектре. Метод остается устойчивым при внесении возмущений в вектор правой части.

Уравнения Поклингтона и Галлена

Связь между электрическим полем и распределением тока по проводнику электрического вибратора описывается уравнениями Максвелла. Моделирование электромагнитных процессов в вибраторах и антеннах основано на решении уравнений Максвелла с различными граничными условиями. Наиболее общей математической моделью электрического вибратора является уравнение Поклингтона:

$$E^t(r) = -\frac{i\eta}{k}\int\limits_{v'} I(r')[k^2 + \nabla^2]\frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}dr', \tag{1.52}$$

где r – точка наблюдения; $E^t(r)(r=(x_1,x_2,x_3))$ – вектор электрического поля; r' точка источника; а функция $I(r')$ $(r'=(x'_1,x'_2,x'_3))$ описывает плотность распределения тока в этой точке; $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ – волновое число (ω – угловая частота, μ – магнитная проницаемость, ε – диэлектрическая проницаемость); $\eta = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ – внутренний импеданс в свободном пространстве; $[k^2 + \nabla^2]$ – оператор Гельмгольца, функция Грина которого равна

$$e^{-ik|r-r'|} / 4\pi\,|\,r - r'\,|, \left|r - r'\right| = \sum_{j=1}^{3}\left|x_j - x_{j'}\right|.$$

Известно, что полное электрическое поле идеального проводника на его поверхности равно нулю. Поэтому при изучении интегрального уравнения электрического вибратора можно положить, что точка наблюдения *r* находится на поверхности проводника, и тогда получим, что $E^t(r_s) = E^i(r_s) + E^s(r_s) = 0,$ где $E^i(r_s)$ – наложенное электрическое поле, а $E^s(r_s)$ – рассеянное электрическое поле.

Так как для переменного тока высокой частоты плотность тока в однородном проводнике различна в разных точках сечения проводника (плотность тока достигает своего максимума у поверхности и минимума ближе к центру сечения провода), то используя уравнение (1.52) можно получить следующее уравнение, описывающее наложенное электрическое поле:

$$E^i(r = r_s) = -\frac{i\eta}{k}\iint_{s'\varphi} I_s(r')(r' = r_s)[k^2 + \nabla^2]\frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi\,|\,r - r'\,|}\,a\,d\varphi' ds'. \qquad (1.53)$$

Здесь переменная s' является длиной дуги по проводу; φ' – азимутальный угол вокруг поперечного сечения провода.

При условии, что радиус *a* проводника значительно меньше длины волны λ, то приходим к модифицированному уравнению Поклингтона [89]:

$$E_s^t(s) = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\int_{s'} I_s(s')[k^2(s \cdot s') + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'}]\frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi\,|\,r - r'\,|}ds'. \qquad (1.54)$$

Здесь функция E_s^t – тангенциальное наложенное электрическое поле. Следовательно, с учетом неоднородности плотности тока в проводнике электрическое поле в уравнении (1.54) выражается криволинейным интегралом по длине дуги s'.

Уравнение (1.54) используется для описания тангенциального наложенного электрического тока при любой топологии тонкой проволочной антенны.

Проведя вычисления производных, легко увидеть, что уравнение (1.54) является гиперсингулярным интегральным уравнением. Следовательно, тангенциальное наложенное электрическое поле на поверхности идеального проводника описывается гиперсингулярным интегральным уравнением.

Исторически [70] при исследовании электромагнитных процессов в вибраторах учитывался радиус вибратора и рассматривалось уравнение Поклингтона для прямолинейного вибратора следующего вида:

$$(k^2 + \frac{d^2}{dz^2})\int_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z - z')dz' = E_z(a, z). \tag{1.55}$$

Здесь $E_z(a, z)$ – продольная составляющая вектора электрического поля, создаваемого неизвестным распределением тока $I_z(z)$, умноженная на соответствующую константу; $2l$ – длина вибратора; a – радиус вибратора; $G(a, z - z') = \dfrac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z - z')}$ – функция Грина; $R_a(z - z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, $k = \dfrac{\omega}{c}$ – волновое число деленное на скорость света.

Этим уравнением моделируется тонкий вибратор, работающий на малых частотах.

В случае переменного тока низкой частоты плотность тока в однородном проводнике распределяется однородно, поэтому плотность текущего распределения тока можно моделировать бесконечно тонкой линией, проходящей через центр проводника и точку разрыва.

Классическое уравнение Поклингтона является уравнением Фредгольма первого рода с гладким ядром [70, 111], следовательно, его решение является некорректной задачей, требующей регуляризации.

Приближенным методам решения классических уравнений Поклингтона (1.52) посвящено большое число работ, подробный анализ этих работ приведен в статье [32]. В большинстве случаев использовались методы Галеркина и моментов [55, 89, 123].

В работе [32] был предложен следующий метод. Так как на концах вибратора ток равен нулю $I_z(l) = I_z(-l) = 0$, то уравнение (1.55) было продолжено на числовую ось и к нему применили преобразование Фурье. Полученное после преобразования Фурье уравнение было решено итерационным методом в спектральной области.

В работе [59] показано, что физически корректной математической моделью произвольного проволочного вибратора является модель, описываемая следующим сингулярным интегральным уравнением первого рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{I_z'(z')}{z'-z}dz' + \int_{-l}^{l} I_z'(z')K(z,z')dz' = 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{cT}(z),$$

$$K(z,z') = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z'-z)}\Delta g(h)dh,$$

$$\Delta g(h) = \frac{\gamma^2 - h^2}{h} J_0\left(-ia\sqrt{h^2-\gamma^2}\, H_0^{(2)}\left(-ia\sqrt{h^2-\gamma^2}\right)\right) + sgn(h),$$

где J_0 – функции Бесселя первого рода; $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода.

Помимо уравнения Поклингтона, для исследования распределения тока по вибратору часто применяется уравнение Галлена:

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')G(a, z-z')dz' = A\cos\beta z + B\sin\beta z - \frac{i2\pi v}{w}\sin\beta|z|, \tag{1.56}$$

где $w = \beta/(\omega\varepsilon)$, а константы A и B – произвольные константы, подбираемые из граничных условий на концах вибратора.

При стремлении радиуса провода a к нулю, уравнение (1.56) трансформируется в следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')G(z-z')dz' = A\cos\beta z + B\sin\beta z - \frac{i2\pi v}{w}\sin\beta|z|, \tag{1.57}$$

где $G(z-z') = \dfrac{1}{4\pi|z-z'|} e^{ik|z-z'|}$.

Основные результаты и выводы по главе 1

Обоснована актуальность темы диссертационного исследования. Дан обзор научных направлений, по которым проводятся исследования.

Описан вспомогательный материал, используемый в диссертационной работе.

Проведенный анализ показывает, что, несмотря на интенсивные исследования, проблема численного синтеза антенн остается актуальной, в особенности для антенн с фрактальной топологией. Большинство исследований в этой области посвящено анализу физических характеристик антенн с топологией фракталов Серпинского, при этом численным методам моделирования антенн и их обоснованию уделено мало внимания.

Показано, что одной из наиболее важных задач в теории антенн является разработка численных методов для расчета электродинамических характеристик фрактальных антенн.

Показано, что одним из основных математических аппаратов для моделирования антенн являются гиперсингулярные интегральные уравнения.

ГЛАВА 2
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА АНТЕНН

Данная глава посвящена исследованию антенн с фрактальной топологией, а именно построению вычислительных алгоритмов решения интегрального уравнения, описывающего диаграмму направленности антенны, построению численных алгоритмов решения задачи распространения тока по антенне. Также построен алгоритм численного решения задачи синтеза антенн в первом приближении в постановке, восходящей к А. Н. Тихонову [78]. Так как решается некорректная задача, то необходим метод ее регуляризации. В качестве метода регуляризации используется модифицированный метод локальных поправок. При решении этих задач возникает необходимость нахождения решения уравнения Фредгольма первого рода на фрактальной области, поэтому была построена модификация метода локальных поправок для уравнений этого вида

2.1. Численный синтез антенны с заданной диаграммой направленности

Одной из важнейших характеристик антенны является ее диаграмма направленности. Поставим задачу синтеза антенны с заданной диаграммой направленности следующим образом.

Дана диаграмма направленности, выраженная функцией $h(k_1,k_2)$ в области $\Omega=[-|k|,|k|]^2$, где $k-$ волновое число.

Требуется определить функцию $g(\zeta,\eta)$ в раскрыве антенны $\Omega_1=[-A,A]$, где $A-$ достаточно большое положительное число.

Диаграмма направленности и искомая функция $g(\zeta,\eta)$ связаны уравнением

$$h(k_1,k_2)=\iint\limits_{\Omega_1} g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta. \tag{2.1}$$

Для уравнения (2.1), описывающего диаграмму направленности антенны (или проекцию диаграммы направленности на плоскость), построен алгоритм решения таких уравнений на одномерном и двумерном раскрыве антенн. Этот алгоритм состоит из трех вычислительных схем, отличающихся выбором функции решения уравнения (2.1) и правилом вычисления интегралов.

Введем узлы $v_i = -A + \frac{2iA}{N}, i = 0,1,...,N.$ Введем сетку узлов $v_{il} = (v_i, v_l),\ i,l = 0,1,...,N.$

Приближенное решение уравнения (1.30) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$g_{NN}^*(\zeta,\eta) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} g_{il}\psi_{il}(\zeta,\eta), \tag{2.2}$$

где $\psi_{il}(\zeta,\eta) = \begin{cases} 1,(\zeta,\eta)\in\Delta_{il}, \\ 0,(\zeta,\eta)\in\Omega_1 \setminus \Delta_{il}, \end{cases}\quad i,l = 0,1,...,N-1.$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\Delta_{il} = [v_i.v_{i+1})\times[v_l, v_{l+1}), i,l = 0,1,...,N-2,\\
&\Delta_{N-1,l} = [v_{N-1}.v_N]\times[v_l, v_{l+1}), l = 0,1,...,N-2,\\
&\Delta_{i,N-1} = [v_i.v_{i+1})\times[v_{N-1}, v_N], i = 0,1,...,N-2,\\
&\Delta_{N-1,N-1} = [v_{N-1}, \mathrm{v}_{N-1}]\times[v_{N-1}, v_{N-1}].
\end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты g_{il} в выражении (2.2) находятся из систем линейных алгебраических уравнений, которые строятся следующим образом.

Приведем три вычислительные схемы для приближенного решения уравнения (1.30) с искомой функцией в виде кусочно-постоянной функции (2.2).

Первая вычислительная схема

Подставим функцию $g_{NN}^*(\zeta,\eta)$ в уравнение (1.30) и воспользуемся методом коллокации по системе узлов $(x_i, x_j), i, j = 0,1,..., N-1;$ $x_j = -|k| + \frac{2|k|j}{N}, \quad j = 0,1,...,N,$ где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны.

Вычислив интегралы, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{4A^2}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} e^{i(x_j v_m + x_l v_n)} = h(x_j, x_l),\ j,l = 0,1,...,N-1. \tag{2.3}$$

Замечание. При построении вычислительной схемы использована квадратурная формула прямоугольников для вычисления интегралов в формуле (1.30). Построенная вычислительная схема оказалась наиболее эффективной в случае, когда функция $|k_1\xi + k_2\eta|, k_1, k_2 \le |k|, |\xi|, |\eta| \le A,$ достаточно мала:

$$4\left(|k|A\right)^2 \le N.$$

Вторая вычислительная схема

Подставим функцию $\overset{*}{g}_{NN}(\zeta,\eta)$ в уравнение (1.30) и воспользуемся методом коллокации по системе узлов $(x_i, x_j), i, j = 0,1,...,N-1;\ x_j = -|k| + \frac{2|k|j}{N},\ j = 0,1,...,N.$

Получим систему уравнений

$$-\frac{1}{k_1 k_2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}\left(e^{ix_j v_{m+1}} - e^{ix_j v_m}\right)\left(e^{ix_l v_{n+1}} - e^{ix_l v_n}\right) = h\left(x_j, x_l\right), \tag{2.4}$$

$$k_1 \ne 0,\ k_2 \ne 0;$$

$$\frac{2A}{iNk_2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}(e^{ix_l v_{n+1}} - e^{ix_l v_n}) = h(0, x_l),\ k_1 = 0,\ k_2 \ne 0;$$

$$\frac{2A}{iNk_1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}(e^{ix_j v_{m+1}} - e^{ix_j v_m}) = h(x_j, 0),\ k_1 \ne 0,\ k_2 = 0;$$

$$i, j = 0,1,...,N-1.$$

Замечание. Эта вычислительная схема получена применением формулы Ньютона – Лейбница для вычисления интегралов в выражении (1.30).

Третья вычислительная схема

Пусть $g(\xi,\eta) \in W^{r,r}$. Приближенное решение уравнения (1.30) ищем в виде локального сплайна

$$g^*_{NN}(\zeta,\eta)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}g_{il}(\zeta,\eta), \tag{2.5}$$

где $g_{il}(\zeta,\eta)$, $(\zeta,\eta)\in\Delta_{il}$, $i,l=0,1,...,N-1$, – интерполяционный тригонометрический полином r-го порядка по каждой переменной, определенный в области Δ_{il}, $i,l=0,1,...,N-1$.

Вычислительная схема в операторной форме имеет следующий вид:

$$\iint_{\Omega} g^*_{NN}(\zeta,\eta)e^{i(w_i\zeta+w_j\eta)}d\zeta d\eta=h(w_i,w_j), \tag{2.6}$$

где (w_i,w_j) – сетка, состоящая из узлов сплайна $g^*_{NN}(\zeta,\eta)$. При непосредственной реализации вычислительной схемы интегралы в левой части уравнения (2.6) вычисляются аналитически.

Решение систем уравнений (2.3), (2.4) и (2.6) (в одномерном или многомерном случае) синтезирует антенну в первом приближении с заданной диаграммой направленности. Результат реализации этого алгоритма приведен в главе 4 данной работы.

Отметим, что описанный алгоритм применим в случае моделирования щелевых антенн с заданными свойствами.

Замечание. Можно заметить, что формула (2.1) является обратным преобразованием Фурье функции $g(\zeta,\eta)$. Действительно, так как функция $h(k_1,k_2)$ вне области $\Omega=[-|k|,|k|]^2$ стремится к нулю, то область интегрирования E_2 можно расширить от $\Omega_1=[-A,A]$ до всей плоскости. Так как перед интегралом в правой части обратного преобразования Фурье должна стоять константа $\frac{1}{4\pi^2}$, то представим функцию $h(k_1,k_2)$ в следующем виде:

$$h(k_1,k_2)=4\pi^2h_1(k_1,k_2).$$

Тогда получим

$$4\pi^2h_1(k_1,k_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta,$$

или

$$h_1(k_1,k_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) является обратным преобразованием Фурье от функции $g(\zeta,\eta)$. То есть функция $g(\zeta,\eta)$ является Фурье-образом для функции $h_1(k_1,k_2)$. Так как преобразование Фурье обратимо в пространстве L_2, то можно получить аналитическое выражение для искомой функции $g(\zeta,\eta)$, применив прямое преобразование Фурье к функции $h(k_1,k_2)$:

$$g(\zeta,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(k_1,k_2)e^{-i(k_1\zeta+k_2\eta)}dk_1 dk_2\,. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) позволяет найти аналитическое выражение для функции $g(\zeta,\eta)$ по заданной диаграмме направленности, выраженной функцией $h(k_1,k_2)$. При этом возникает задача вычисления преобразования Фурье.

Преобразованию Фурье посвящено большое число работ. Фундаментальные результаты по теории вычисления преобразования Фурье представлены в монографиях Задираки [45] и Бахвалова [5].

Однако при применении формулы (2.8) полученная функция $g(\zeta,\eta)$ будет располагаться в той же области, что и функция $h(k_1,k_2)$, задающая диаграмму направленности. Но согласно постановке задачи синтеза антенны с заданной диаграммой нужно найти $g(\zeta,\eta)$ в раскрыве антенны $\Omega_1=[-A,A]$, если функция $h(k_1,k_2)$ задана в области $\Omega=[-|k|,|k|]^2$.

Подобное преобразование области возможно при использовании дискретного преобразования Фурье, но это создает дополнительные трудности. Кроме того, проведенное в работе сравнение эффективности предложенных вычислительных схем с методом, основанным на преобразовании Фурье, говорит в пользу предложенных методов. Этот вопрос подробно рассмотрен в главе 4.

2.2. Численный метод решения задачи распределения тока по вибратору на основе уравнений Поклингтона и Галлена

Приближенное решение уравнения Поклингтона

Рассмотрим классическое уравнение Поклингтона:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} I_z(z')\left[\frac{d^2}{dz^2}+\gamma^2\right]\frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')}dz' = i\omega\varepsilon E_z(z), \tag{2.9}$$

где $E_z(z)$ – продольная составляющая вектора электрического поля, создаваемого неизвестным распределением тока $I_z(z)$, $R(z-z')=\sqrt{(z-z')^2+a^2}$, $\gamma^2=k^2\varepsilon\mu$, $k=\omega/c$ – волновое число; ε,μ – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость пространства, окружающего вибратор; a – толщина вибратора.

Ниже для его решения построено несколько вычислительных схем.

Введем следующие обозначения. Пусть $f(z)=-i\omega\varepsilon_0\varepsilon E^{ct}(z)$,

$$U(z)=\int_{-l}^{l} I_z(z')\frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')}dz'. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) можно представить в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\gamma^2\right)U(z)=f(z) \tag{2.11}$$

с граничными условиями:

$$U(-l)=a_1,\ U(l)=a_2, \tag{2.12}$$

которые определяются константами a_1 и a_2, характеризующими электромагнитное поле на концах вибратора.

Уравнение (2.12) имеет следующее решение:

$$U(z)=F(z)+A\cos(\gamma z)+B\sin(\gamma z), \tag{2.13}$$

где функция $F(z)$ является частным решением уравнения (2.11).

Воспользовавшись граничными условиями (2.12), получаем систему уравнений, из которой и вычислим константы A и B:

$$a_1 = F(-l) + A\cos(\gamma l) - B\sin(\gamma l),$$

$$a_2 = F(l) + A\cos(\gamma l) + B\sin(\gamma l). \qquad (2.14)$$

Очевидно, $A = \dfrac{\left(a_1 + a_2 - F(-l) - F(l)\right)}{2\cos(\gamma l)}$, $B = \dfrac{\left(a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)\right)}{2\sin(\gamma l)}$.

Предполагая, что $\cos(\gamma l) \neq 0, \sin(\gamma l) \neq 0,$ получаем выражение

$$U(z) = F(z) + \frac{a_1 + a_2 - F(-l) - F(l)}{2\cos(\gamma l)}\cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)}{2\sin(\gamma l)}\sin(\gamma z).$$

Рассмотрим модель вибратора с $E^{ct}(z) = -4 sin\omega z.$ Тогда $f(z) = 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega z)$.

Частное решение уравнения (2.11) при $f(z) = 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega z)$ будет равно $F(z) = \dfrac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2}$.

Таким образом, совершаем переход от общего уравнения Поклингтона (2.9) к уравнению Галлена

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')\frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R}dz' = \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} +$$

$$+\frac{a_1 + a_2 + \dfrac{-4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega(-l)\right) - 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega l)}{\gamma^2 - \omega^2}}{2\cos(\gamma l)}\cos(\gamma z) +$$

$$+\frac{a_2 - a_1 + \dfrac{-4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega l) + 4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega(-l)\right)}{\gamma^2 - \omega^2}}{2\sin(\gamma l)}\sin(\gamma z)$$

с коэффициентами a_1 и a_2, характеризующими электромагнитное поле на концах вибратора.

Преобразуем это интегральное уравнение, используя особенности функции $\sin x$. Получим

$$\int_{-l}^{l} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \tag{2.15}$$

$$+\frac{a_1 + a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1 + \dfrac{-8i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sin(\omega l)}{\gamma^2 - \omega^2}}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

с коэффициентами a_1 и a_2, определенными выражением (2.12).

В случае симметричного вибратора, в котором $I_z(-l) = I_z(l)$, получим следующий переход от общего уравнения Поклингтона (2.9) к уравнению Галлена

$$\int_{-l}^{l} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \tag{2.16}$$

$$+\frac{a_1 + a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1 - \dfrac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon \sin(\omega l)}{\gamma^2 - \omega^2}}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

с коэффициентами a_1 и a_2, определенными выражением (2.12).

Отметим, что полученное таким образом уравнение совпадает с аналогичным уравнением, полученным в [37] из физических соображений.

Таким образом, задача моделирования вибратора представлена интегральными уравнениями Фредгольма первого рода (2.15) (или (2.16)).

Для решения уравнения Поклингтона (2.9) и Галлена (2.16) был построен и обоснован вычислительный алгоритм, основанный на методе коллокаций. Этот алгоритм состоит из двух вычислительных схем для уравнения Галлена (2.16) и одной – для уравнения Поклингтона (2.1).

Применим метод коллокации для решения уравнения (2.15).

Разобьем отрезок $[-l;l]$ на $2N$ равных сегментов точками $x_k, x_k = -l + \dfrac{lk}{N}$, $k = 0,1,\ldots,2N$.

Введем дополнительную сетку x': $x'_k = x_k + \dfrac{l}{2N}$, $k = 0,1,\ldots,2N-1$.

Приближенное решение уравнения (2.16) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$I_{z,N}(z') = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(z'), \tag{2.17}$$

где

$$\psi_k(z') = \begin{cases} 1, z' \in \Delta_k, \\ 0, [-l,l] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,2N-1,$$

$$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}), k = 0,1,\ldots,2N-2, \Delta_{2N-1} = [x_{2N-1}, x_{2N}].$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha_0 = \alpha_{2N-1} = 0$, что соответствует нулевым значениям тока на торцах вибратора.

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = 1,\ldots,2N-2$, определяются по одной из приведенных ниже вычислительных схем.

Первая вычислительная схема

В качестве узлов коллокации выберем введенную выше сетку x': $x'_k = x_k + \dfrac{l}{2N}$, $k = 0,1,\ldots,2N-1$.

Подставим искомую функцию (2.17) в уравнение (2.16) и вычислим интеграл в левой части уравнения (2.16), применяя квадратурную формулу прямоугольников. В результате приходим к следующей вычислительной схеме:

$$\frac{l}{N}\sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(j,k)}}{4\pi R_a(j,k)} = \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega x'_j)}{\gamma^2-\omega^2} + (a_1+a_2)\frac{\cos(\gamma x'_j)}{2\cos(\gamma l)} +$$

$$+(a_2-a_1)\frac{\sin(\gamma x'_j)}{2\sin(\gamma l)} - \frac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega l)}{(\gamma^2-\omega^2)}\frac{\sin(\gamma x'_j)}{2\sin(\gamma l)}, \; j = 0,\ldots,2N-1.$$

Представим эту систему в виде, удобном для дальнейших рассуждений, перенеся неизвестные переменные из правой части в левую:

$$\frac{l}{N}\sum_{k=1}^{2N-2}\alpha_k\frac{e^{-i\gamma R_a(j,k)}}{4\pi R_a(j,k)}-a_1\left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)}-\frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)}\right)- \tag{2.18}$$

$$-a_2\left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)}+\frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)}\right)=\frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega x'_j\right)}{\gamma^2-\omega^2}-\frac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega l\right)}{\left(\gamma^2-\omega^2\right)}\frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)},$$

$$j=0,...,2N-1.$$

Здесь $R_a(k,j)=\sqrt{\left(x'_k-x_j\right)^2+a^2}$, a – радиус стержня антенны.

Запишем систему (2.18) в матричном виде:

$$CX=F\ ,$$

Структура матриц C, X, и F очевидна.

Эта система состоит из $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными: $\{\alpha_k\}$, $k=1,...,2N-2$ и a_1,a_2.

Проведем обоснование однозначной разрешимости для системы уравнений (2.18). Если логарифмическая норма матрицы C в некотором банаховом пространстве отрицательна, то по утверждению 1.5 система (2.18) имеет единственное решение.

Оценим сверху логарифмическую норму Δ_3.

Напомним, что логарифмическая норма в пространстве R^n n-мерных векторов $x=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ с нормой $\|x\|=\max|x_i|$, $i=1,...,n,$ определяется равенством

$$\Delta_3\left(A\right)=\sup_j\left\{\operatorname{Re}a_{jj}+\sum_{\substack{k\neq j\\ k=1}}^{n}\left|a_{jk}\right|\right\}. \tag{2.19}$$

Оценим элементы, входящие в выражение (2.19). Так как для диагональных элементов $k=j$, то $R_a(j,j)=\sqrt{\left(x_j'-x_j\right)^2+a^2}=\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}$. Тогда получаем

$$\operatorname{Re}C_{jj}=\operatorname{Re}\left|\int_{\Delta_j}\frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j')}}{4\pi R_a(z'-x_j')}dz'\right|\le\operatorname{Re}\int_{\Delta_j}\left|\frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j')}}{4\pi R_a(z'-x_j')}\right|dz'=$$

$$=\operatorname{Re}\int_{\Delta_j}\frac{1}{4\pi R_a(z'-x_j')}dz'=\operatorname{Re}\frac{1}{4\pi}\int_{\Delta_j}\frac{1}{\sqrt{\left(z'-x_j'\right)^2+a^2}}dz'=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\left|z'-x_j+\sqrt{\left(z'-x_j'\right)^2+a^2}\right|\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}}=\frac{1}{4\pi}\ln\left|x_{j+1}-x_j'+\sqrt{\left(x_{j+1}'-x_j\right)^2+a^2}\right|\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\ln\left|x_j-x_j'+\sqrt{\left(x_j-x_j'\right)^2+a^2}\right|\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}}\le\frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}}{-\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{l+\sqrt{l^2+4a^2N}}{-l+\sqrt{l^2+4a^2N}}\right|,\ j=0,...,2N-1.$$

Оценим сумму модулей внедиагональных элементов:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{2N-2}\left|C_{kj}\right|=\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{2N-2}\operatorname{Re}\left|\int_{\Delta_k}\frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j')}}{4\pi R_a(z'-x_j')}dz'\right|=\int_{[-l;l]/\Delta_j}\left|\frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j')}}{4\pi R_a(z'-x_j')}\right|dz'. \qquad (2.20)$$

Для оценки суммы модулей внедиагональных элементов оценим интеграл в формуле (2.20):

$$\int_{[-l;l]/\Delta_j}\left|\frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j')}}{4\pi R_a(z'-x_j')}\right|dz'=\int_{[-l;l]/\Delta_j}\left|\frac{e^{-i\gamma\sqrt{\left(z'-x_j\right)^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{\left(z'-x_j\right)^2+a^2}}\right|dz'\le$$

$$\le \int\limits_{[-l;l]/\Delta_j} \left| \frac{e^{-i\gamma\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}} \right| dz' \le \int\limits_{[-l;l]/\Delta_j} \frac{\left| e^{-i\gamma\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}} \right|}{\left| 4\pi\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2} \right|} dz' \le$$

$$\le \int\limits_{[-l;l]/\Delta_j} \frac{1}{4\pi\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}} dz' = \int\limits_{-l}^{x_j} \frac{1}{4\pi\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}} dz' +$$

$$+ \int\limits_{x_{j+1}}^{l} \frac{1}{4\pi\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2}} dz' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left| z'-x'_j+\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2} \right| \Bigg|_{z'=-l}^{z'=x_j} + \frac{1}{4\pi} \ln\left| z'-x'_j+\sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2+a^2} \right| \Bigg|_{z'=x_{j+1}}^{z'=l} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\ln\left| x_j-x'_j+\sqrt{\left(x_j-x'_j\right)^2+a^2} \right| - \ln\left| -l-x'_j+\sqrt{\left(-l-x'_j\right)^2+a^2} \right| \right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\ln\left| l-x'_j+\sqrt{\left(l-x'_j\right)^2+a^2} \right| - \ln\left| x_{j+1}-x'_j+\sqrt{\left(x_{j+1}-x'_j\right)^2+a^2} \right| \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left| \frac{-\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(-\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}}{-l-x'_j+\sqrt{\left(-l-x'_j\right)^2+a^2}} \right| + \frac{1}{4\pi} \ln\left| \frac{l-x'_j+\sqrt{\left(l-x'_j\right)^2+a^2}}{\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left| \frac{\left(-\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}\right)\left(l-x'_j+\sqrt{\left(l-x'_j\right)^2+a^2}\right)}{\left(\frac{l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{l}{2N}\right)^2+a^2}\right)\left(-l-x'_j+\sqrt{\left(-l-x'_j\right)^2+a^2}\right)} \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left| \frac{\left(-l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(l-x'_j+\sqrt{\left(l-x'_j\right)^2+a^2}\right)}{\left(l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(-l-x'_j+\sqrt{\left(-l-x'_j\right)^2+a^2}\right)} \right|.$$

Своего наибольшего значения это выражение достигает при $x'_j = x'_2 = -l + \frac{3l}{2N}$. Поэтому модель суммы внедиагональных элементов можно оценить следующим выражением:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{2N-2}\left|C_{kj}\right| \le \frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{\left(-l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(l-(-l+\frac{3l}{2N})+\sqrt{\left(-l+\frac{3l}{2N}\right)^2+a^2}\right)}{\left(l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(-l-\left(-l+\frac{3l}{2N}\right)+\sqrt{\left(-l+\frac{3l}{2N}\right)^2+a^2}\right)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{\left(-l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(2l-\frac{3l}{2N}+\sqrt{\left(l+\frac{3l}{2N}\right)^2+a^2}\right)}{\left(l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(-\frac{3l}{2N}+\sqrt{\left(\frac{3l}{2N}\right)^2+a^2}\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{\left(-l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(4lN-3l+\sqrt{\left(2lN+3l\right)^2+4a^2N^2}\right)}{\left(l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(-3l+\sqrt{9l^2+4a^2N^2}\right)}\right|.$$

Таким образом, получаем, что значение диагонального элемента равно

$$C_{jj} = \frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{l+\sqrt{l^2+4a^2N}}{-l+\sqrt{l^2+4a^2N}}\right|, \tag{2.21}$$

а суммы внедиагональных

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{2N-2} C_{kj} = \frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{\left(-l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(4lN-3l+\sqrt{\left(2lN+3l\right)^2+4a^2N^2}\right)}{\left(l+\sqrt{l^2+4a^2N^2}\right)\left(-3l+\sqrt{9l^2+4a^2N^2}\right)}\right|. \tag{2.22}$$

Если выполняются условия теоремы Лозинского (утверждение 1.4), то решение система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (2.18) сходится к точному решению уравнения (2.9), в противном случае необходимо воспользоваться обобщением непрерывного операторного метода (рисунок 2.1).

Проиллюстрируем (согласно теореме Адамара) выполнение условия однозначной разрешимости системы (2.18) при различном числе узлов N и $l=1$.

Систему уравнений (2.18) решаем непрерывным методом решения операторных уравнений (см. разд. 1.6).

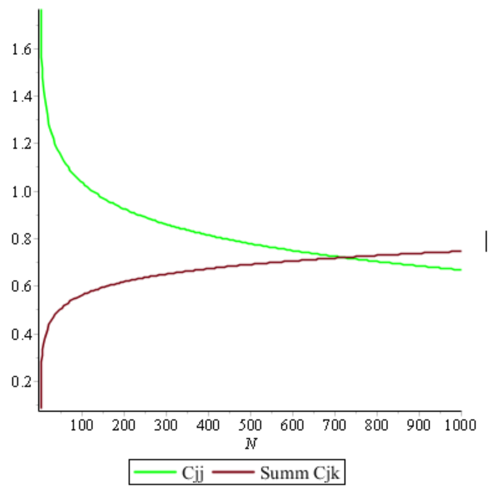
Применительно к уравнению (2.18) непрерывный метод решения операторных уравнений заключается в следующем. Уравнению (2.18) ставится в соответствие задача Коши. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma}=v_j\left[\sum_{k=1}^{2N-2}\alpha_k(\sigma)\frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)}-a_1\left(\frac{\cos(\gamma x'_j)}{2\cos(\gamma l)}-\frac{\sin(\gamma x'_j)}{2\sin(\gamma l)}\right)-\right. \tag{2.23}$$

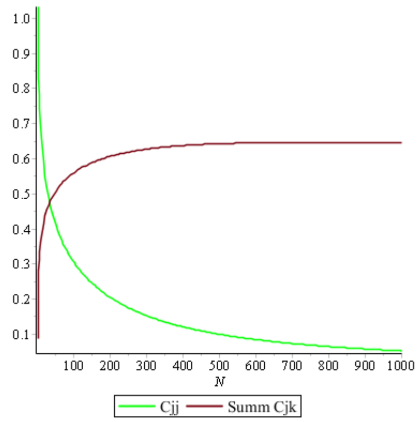
$$\left.-a_2\left(\frac{\cos(\gamma x'_j)}{2\cos(\gamma l)}+\frac{\sin(\gamma x'_j)}{2\sin(\gamma l)}\right)=\frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega x'_j)}{\gamma^2-\omega^2}-\frac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin(\omega l)}{(\gamma^2-\omega^2)}\frac{\sin(\gamma x'_j)}{2\sin(\gamma l)}\right],$$

$$j=0,...,2N-1;$$

$$\alpha_j(0)=0, a_1(0)=0, a_2(0)=0,\quad j=1,...,2N-2. \tag{2.24}$$



а) a = 0,000014990



б) a = 0,00014990

Рисунок 2.1 – Сравнение значения диагонального элемента и суммы внедиагональных элементов системы (2.18) в зависимости от числа используемых узлов при диаметре проводника a

Константы $v_j = \pm 1, j = 0,1,\ldots,2N-1,$ в системе уравнений (2.23) с начальным условием (2.24) выбираются так, чтобы логарифмическая норма матрицы левой части системы уравнений (2.18) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

В этом случае согласно утверждению 1.6 в метрике выбранного банахова пространства будет осуществляться сходимость решения задачи Коши (2.23) к решению системы уравнений (2.18).

Так как при вычислении интегралов в формуле (2.18) применялась квадратурная формула прямоугольников, то данная вычислительная схема дает большую погрешность при небольшом числе узлов коллокации (это соответствует как теоретическим выкладкам, так и вычислительному эксперименту). Более эффективной является следующая вычислительная схема.

Вторая вычислительная схема

Будем решать уравнение (2.15) коллокационным методом, находя решение в виде кусочно-постоянной функции, вычисляя интеграл в левой части уравнения (2.15) аналитически. Подставляя (2.17) в уравнение (2.15), приходим к вычислительной схеме:

$$\sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk}\alpha_k - a_1\left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)} - \frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)}\right) - a_2\left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)} + \frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)}\right) = \tag{2.25}$$

$$= \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega x'_j\right)}{\gamma^2-\omega^2} - \frac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega l\right)}{\left(\gamma^2-\omega^2\right)}\frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)}, j = 0,\ldots,2N-1.$$

Здесь $p_{jk} = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{e^{-i\gamma R_a\left(z'-x'_j\right)}}{4\pi R_a\left(z'-x'_j\right)}dz',\ R_a\left(z'-x'_j\right) = \sqrt{\left(z'-x'_j\right)^2 + a^2}, j = 0,\ldots,2N-1.$

Систему уравнений (2.25) решаем непрерывным методом решения операторных уравнений (см. раздел 1.6).

Применительно к уравнению (2.25) непрерывный метод решения операторных уравнений заключается в следующем. Уравнению (2.25) ставится в соответствие задача Коши. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma} = v_j \left[\sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk}\alpha_k(\sigma) - a_1 \left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)} - \frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)} \right) - \right. \tag{2.26}$$

$$\left. -a_2 \left(\frac{\cos\left(\gamma x'_j\right)}{2\cos\left(\gamma l\right)} + \frac{\sin\left(\gamma x'_j\right)}{2\sin\left(\gamma l\right)} \right) - \frac{4i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega x'_j\right)}{\gamma^2-\omega^2} + \frac{8i\omega\varepsilon_0\varepsilon\sin\left(\omega l\right)}{2\left(\gamma^2-\omega^2\right)\sin\left(\gamma l\right)}\sin\left(\gamma x_j\right) \right],$$

$$j = 0,...,2N-1;$$

$$\alpha_j(0) = 0, a_1\left(0\right) = 0, a_2\left(0\right) = 0, \quad j = 1,...,2N-2. \tag{2.27}$$

Константы $v_j = \pm 1, j = 0,\ldots,2N-1,$ в уравнении (2.26) выбираются так, чтобы логарифмическая норма матрицы левой части системы уравнений (2.25) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

В этом случае согласно утверждению 2.1 в метрике выбранного банахова пространства будет осуществляться сходимость решения задачи Коши (2.26), (2.27) к решению системы уравнений (2.22).

Третья вычислительная схема

Рассмотрим классическое уравнение Поклингтона

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} I_z\left(z'\right)\left[\frac{d^2}{dz^2}+\gamma^2\right]\frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')}dz' = i\omega\varepsilon E_z\left(z\right), \tag{2.28}$$

где $R_a(z-z') = \sqrt{a^2+(z-z')^2}.$

Преобразуем его к виду

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} I_z\left(z'\right)h\left(z,z'\right)dz' = i\omega\varepsilon E_z\left(z\right),$$

в котором ядро $h\left(z,z'\right)$ описывается следующим выражением:

$$h(z,z')=\frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')}\left(\left[\gamma^2+\frac{(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{a^2+(z-z')^2}+\right.\right. \tag{2.29}$$

$$\left.\left.+\frac{3(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^2}-\gamma^2\frac{(z-z')^2}{a^2+(z-z')^2}+i\left[\frac{3\gamma^2(z-z')^2}{a^2+(z-z')^{3/2}}-\frac{\gamma}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}\right]\right]\right).$$

Выберем следующие узлы коллокации: $x_k'=x_k+\dfrac{l}{2N}, k=0,1,...,2N-1.$

Приближенное решение уравнения (2.29) будем искать в виде кусочно-постоянной функции:

$$I_{z,N}(z')=\sum_{k=0}^{2N-1}\alpha_k\psi_k(z'), \tag{2.30}$$

где

$$\psi_k(z')=\begin{cases}1, & z'\in\Delta_k\\ 0, & z'\in[-l,l]\setminus\Delta_k,\end{cases}\quad k=0,1,...,2N-1,$$

$$\Delta_k=[x_k,x_{k+1}), k=0,1,...,2N-2, \Delta_{2N-1}=[x_{2N-1},x_{2N}].$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ найдем из системы

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l}I_{z,N}(z')h(x_k',z')dz'=i\omega\varepsilon E_z(x_k'),\ k=0,1,...,2N-1. \tag{2.31}$$

Подставляя решение (2.30) в уравнение (2.31) и вычисляя интеграл в левой части уравнения (2.31) по квадратурной формуле прямоугольников, получим систему

$$\frac{l}{N}\sum_{k=0}^{2N-1}\alpha_k h(x_j',x_k)=i\omega\varepsilon E_z(x_j'),\ j=0,...,2N-1. \tag{2.32}$$

Систему уравнений (2.32) решим, используя непрерывный метод решения операторных уравнений.

Поставим системе (2.32) в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получим следующую систему:

$$\frac{da_l(\sigma)}{d\sigma} = v_0\left[\frac{l}{N}\sum_{k=0}^{2N-1}\alpha_k(\sigma)h(x'_k, x_l) - i\omega\varepsilon E_z(x'_k)\right],\ l = 0,...,2N-1, \tag{2.33}$$

$$a_l(0) = 0,\quad l = 0,1,...,2N-2. \tag{2.34}$$

Константы $v_j = \pm 1, j = 0,1,\ldots,2N-1,$ в уравнении (2.33) определяются так, чтобы логарифмическая норма матрицы левой части системы уравнений (2.33) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

В этом случае согласно утверждению 2.1 в метрике выбранного банахова пространства будет осуществляться сходимость решения задачи Коши (2.33), (2.34) к решению системы уравнений (2.32).

Рассмотрим предельный случай при $a \to 0$, и построим соответствующую вычислительную схему.

В этом случае аналогично третьей вычислительной схеме преобразуем уравнение (2.28) к виду

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} I_z(z')h(z,z')s(z,z')dz' = i\omega\varepsilon E_z(z),$$

в котором ядро $h(z,z')s(z,z')$ описывается следующим выражением:

$$h(z,z') = e^{-i\gamma\left(a^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}, \tag{2.35}$$

$$s(z,z') = \left[\gamma^2 + \frac{(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^2} - \frac{1}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^{3/2}} + \right. \tag{2.36}$$

$$\left. + \frac{3(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^{5/2}} - \gamma^2\frac{(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\right] + i\left[\frac{3\gamma^2(z-z')^2}{\left(a^2+(z-z')^2\right)^2} - \frac{\gamma}{a^2+(z-z')^2}\right]\Bigg).$$

При $a = 0$ получаем:

$$h\left(z,z'\right)=e^{-i\gamma|z-z'|}, \tag{2.37}$$

$$s\left(z,z'\right)=\left(\left[\frac{\gamma^2}{\left((z-z')^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left((z-z')^2\right)^{3/2}}+\frac{3\left(z-z'\right)^2}{\left((z-z')^2\right)^{5/2}}-\right.\right. \tag{2.38}$$

$$\left.\left.-\gamma^2\frac{\left(z-z'\right)^2}{\left((z-z')^2\right)^{3/2}}+i\left[\frac{3\gamma^2\left(z-z'\right)^2}{\left((z-z')^2\right)^2}-\frac{\gamma}{(z-z')^2}\right]\right]\right).$$

Упростим функцию (2.38), приведя подобные и сократив выражения:

$$s\left(z,z'\right)=\left(\left[\frac{\gamma^2}{|z-z'|}-\frac{1}{|z-z'|^3}+\frac{3}{|z-z'|^3}-\frac{\gamma^2}{|z-z'|}+i\left[\frac{3\gamma^2}{(z-z')^2}-\frac{\gamma}{(z-z')^2}\right].\right.\right.$$

Окончательно получаем:

$$s\left(z,z'\right)=\frac{2}{|z-z'|^3}+i\frac{2\gamma^2}{(z-z')^2}. \tag{2.39}$$

В итоге приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l}I_z\left(z'\right)h\left(z,z'\right)s\left(z,z'\right)dz'=i\omega\varepsilon E_z\left(z\right), \tag{2.40}$$

где

$$h\left(z,z'\right)=e^{-i\gamma|z-z'|},$$

$$s\left(z,z'\right)=\frac{2}{|z-z'|^3}+i\frac{2\gamma^2}{(z-z')^2}.$$

Замечание. Проведенные эксперименты показывают, что разработанная вычислительная схема эффективна в широком спектре значений параметра a. Представляет рассмотрение предельного случая, когда $a=0$ как чисто математической задачи, хотя, скорее всего, эта задача не имеет физического смысла.

Выберем следующие узлы коллокации: $x'_k = x_k + \frac{l}{2N}, k = 1,...,2N-2.$

Приближенное решение уравнения (2.40) будем искать в виде кусочно-постоянной функции:

$$I_{z,N}(z') = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(z'), \tag{2.41}$$

где

$$\psi_k(z') = \begin{cases} 1, z' \in \Delta_k, \\ 0, [-l,l] \setminus \Delta_k, \end{cases} \; k = 0,1,...,2N-1,$$

$$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}), k = 0,1,...,2N-2, \Delta_{2N-1} = [x_{2N-1}, x_{2N}].$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ найдем из системы:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} \alpha_k h(x'_l, z') s(x'_l, z') dz' = i\omega\varepsilon E_z(x'_l), \; k = 0,1,...,2N-1. \tag{2.42}$$

Преобразуем уравнение (2.42) следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k h(x'_l, \bar{x}_k) \int_{\Delta_k} s(x'_l, z') dz' = i\omega\varepsilon E_z(x'_l), \; l = 0,1,...,2N-1, \tag{2.43}$$

где $\bar{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Вычислив интегралы в системе уравнений (2.43), получим следующую систему:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k h(x'_l, \bar{x}_k) S_{k,l} = i\omega\varepsilon E_z(x'_l), \; l = 0,1,...,2N-1, \tag{2.44}$$

$$S_{k,i} = \begin{cases} \frac{1}{2(z-z')^2}, & z' < z, \\ -\frac{1}{2(z-z')^2}, & z < z', \end{cases} - I\frac{2k}{z-z'}.$$

Систему уравнений (2.44) решим, используя непрерывный метод решения операторных уравнений.

Поставим системе (2.44) в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получим следующую систему:

$$\frac{da_l(\sigma)}{d\sigma} = v_0 \left[\sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k(\sigma) h(x_l', \bar{x}_k) S_{k,l} - i\omega\varepsilon E_z(x_l) \right],\ l = 0,\ldots,2N-1, \tag{2.45}$$

$$a_l(0) = 0, \quad l = 0,1,\ldots,2N-1. \tag{2.46}$$

Константы $v_j = \pm 1, j = 0,1,\ldots,2N-1$, в уравнении (2.45) определяются так, чтобы логарифмическая норма матрицы левой части системы уравнений (2.25) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

Если это условие не выполняется, то следует перейти к реализации обобщения непрерывного операторного метода, изложенного в разд. 1.6.

В этом случае согласно утверждению 2.1 в метрике выбранного банахова пространства будет осуществляться сходимость решения задачи Коши (2.45), (2.46) к решению системы уравнений (2.43).

В главе 4 представлены результаты решения уравнения Поклингтона с помощью непрерывного операторного метода.

Приближенное решение уравнения Галлена

Вторым классическим уравнением, используемым при моделировании электрических вибраторов, является уравнение Галлена. Рассмотрим это уравнение при следующих допущениях: радиус вибратора a значительно меньше его длины, равной $2l$, и длины волны λ, т.е. $a \ll l,\ a \ll \lambda$.

Сделаем следующие предположения [37]:

1. Поверхностные электрические токи $I_z^-(z)$ вместе с магнитными эквивалентными токами $I_\varphi^m(z)$ заменяются бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока $I_z(z) = 2\pi a I_z^-(z)$ и полагают $I_z^-(-l) = I_z^-(l)$. Продольный

электрический ток в области зазора считается непрерывным. Торцевые токи игнорируются.

2. Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля $E_z(z)$, создаваемая током $I_z(z)$ на боковой поверхности цилиндра радиуса a, обращается в нуль всюду, кроме окрестности зазора шириной b:

$$E_z(z) = \begin{cases} 0, |z| > \dfrac{b}{2}, \\ i\omega\varepsilon E\ (z), |z| \le \dfrac{b}{2}, \end{cases}$$

где b – ширина зазора.

Замечание. Для узких зазоров функция $E_z(z), -\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$, обычно полагается постоянной.

При этих предположениях получаем уравнение Галлена тонкого вибратора:

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')K(z-z')dz' = C_1 coskz + C_2 sinkz - \frac{2\pi iV}{W}\sin k\,|\,z\,|, -l \le z \le l, \qquad (2.47)$$

$$K(z-z') = \frac{e^{-i\gamma\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}.$$

Правая часть уравнения (2.47) рассматривается, как суперпозиция трех бегущих волн, одна из которых имеет амплитуду $\frac{2\pi V}{W}$, где V – ЭДС генератора, $W = k/(\omega\varepsilon)$.

В случае симметричного вибратора имеем

$$\int_{-l}^{l} I_z(z')K(z-z')dz' = -\frac{i}{\eta}\left(C_3 cos\gamma z - \frac{2\pi iV}{W}\sin\gamma\,|\,z\,|\right),\ -l \le z \le l, \qquad (2.48)$$

где η – волновое сопротивление для свободного пространства; а константа C_3 определяется из условия обращения в нуль тока на концах антенны.

Из (2.48) следует, что задача моделирования симметричного вибратора представлена интегральными уравнениями Фредгольма первого рода (2.48).

Для решения уравнения (2.48) воспользуемся методом коллокации.

Разобьем отрезок $\left[-l;l\right]$ на $2N$ равных сегментов точками $x_k, x_k = -l + \dfrac{lk}{N}$, $k = 0,1,...,2N-1$.

Введем дополнительную сетку узлов x': $x'_k = x_k + \dfrac{l}{2N}$, $k = 0,1,...,2N-1$.

Приближенное решение уравнения (2.48) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$I_{z,N}\left(z'\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k\left(z'\right), \tag{2.49}$$

где

$$\psi_k\left(z'\right) = \begin{cases} 1, z' \in \Delta_k, \\ 0, \left[-l,l\right] \setminus \Delta_k, \end{cases} k = 0,1,...,2N-1,$$

$$\Delta_k = \left[x_k, x_{k+1}\right), k = 0,1,...,2N-2, \Delta_{2N-1} = \left[x_{2N-1}, x_{2N}\right].$$

Будем рассматривать случай, когда $\alpha_0 = \alpha_{2N-1} = 0,$ что соответствует нулевым значениям тока на торцах вибратора.

Неизвестные коэффициенты $\left\{\alpha_k\right\}$, $k = 1,...,2N-2$, определяются по следующей вычислительной схеме.

Воспользуемся построенной ранее сеткой узлов $x_k = -l + \dfrac{lk}{N}, k = 0,1,...,2N,$ в качестве узлов коллокации.

Подставляя искомую функцию (2.49) в уравнение (2.48) и вычисляя интеграл в левой части уравнения (2.48) по квадратурной формуле прямоугольников, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{R_a(k,j)} = -\frac{i}{\eta}\left(C_3 \cos\gamma x_j - \frac{2\pi i V}{W} \sin\gamma \,|\, x_j \,|\right), \; j = 1,...,2N-2. \tag{2.50}$$

Здесь $R_a(k,j)=\sqrt{\left(x_k-x_j\right)^2+a^2}$, a – радиус стержня антенны.

Искомые коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k=1,...,2N-2$, определяются из решения системы (2.48).

К системе уравнений (2.50) применим непрерывный метод решения операторных уравнений, согласно которому системе (2.50) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_l(\sigma)}{d\sigma}=v_j\left[\frac{l}{N}\sum_{k=1}^{2N-2}\alpha_k\left(\sigma\right)\frac{e^{-ikR_a(k,j)}}{R_a(k,j)}\frac{l}{N}+\frac{i}{\eta}\left(C_3\cos\gamma x_j-\frac{2\pi iV}{W}\sin\gamma\left|x_j\right|\right)\right], \qquad (2.51)$$

$$j=1,2,...2N-2,$$

$$a_l\left(0\right)=0,\ \ l=1,...,2N-2. \qquad (2.52)$$

Константы $v_j=\pm 1, j=0,1,\ldots,2N-1,$ в уравнении (2.51) определяются так, чтобы логарифмическая норма матрицы в правой части системы уравнений (2.51), (2.52) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

Если это условие не выполняется, то следует перейти к реализации обобщения непрерывного операторного метода, изложенного в разд 1.6.

Так как структура элементов матрицы B аналогична структуре элементов матрицы левой части системы уравнений (2.18), то доказательство однозначной разрешимости системы уравнений (2.50) проводится по аналогии с соответствующим доказательством для вычислительной схемы уравнения Поклингтона.

В результате приходим к следующему утверждению: в метрике выбранного банахова пространства будет осуществляться сходимость решения системы линейных дифференциальных уравнений (2.51) к решению уравнения (2.47).

Результаты реализации представленного выше алгоритма представлены в главе 4.

2.3. Моделирование антенн интегральными уравнения Фредгольма

В связи с тем, что уравнение (2.1), описывающее диаграмму направленности антенны, и уравнения (2.9), (2.15), применяемые для нахождения распределения тока по антенные, являются уравнениями Фредгольма первого рода, то в работе была построена модификация алгоритма локальных поправок для уравнения Фредгольма. Также был построен алгоритм численного решения задачи синтеза антенн в первом приближении в постановке, восходящей к А. Н. Тихонову [78].

2.3.1. Постановка задачи моделирования антенны

Задача синтеза антенн ставится следующим образом: необходимо построить антенну, которая будет генерировать сигнал, обладающий заданными характеристиками. В математическом виде эта задача формулируется следующим образом: необходимо подобрать элемент x, который будет создавать сигнал

$$f = Ax, \tag{2.53}$$

обладающий заданными характеристиками.

Отметим, что этот метод построения антенн восходит к работам [78, 81, 82].

На искомый элемент x налагается несколько дополнительных условий. Сигнал x^* определяется решением уравнения (2.53), в котором функция f^* обладает нужными характеристиками. Вследствие того, что оператор A является компактным, решение уравнения (2.53) представляет собой некорректную задачу, и для ее решения в [78, 81, 82] были использованы методы регуляризации.

При решении задачи синтеза антенны будем исходить из математической модели антенны, описываемой интегральным уравнением Фредгольма первого рода:

$$f(t) = \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau, t \in [0,\pi]. \tag{2.54}$$

Потребуем, чтобы сигнал $x(t)$ обладал заданными характеристиками.

В качестве ядра $h(t,\tau)$ возьмем гладкую функцию. В работе [81] была взята функция $h(t,\tau)=\cos(kt\cos\tau)$, где k – заданный параметр.

Отметим, что уравнение (2.54) получилось при замене $t=\frac{\pi}{2}\xi,\ \tau=\frac{-ka}{\pi}\cos\theta$ в следующем уравнении [81]:

$$N\left(\cos\theta\right)=\int_{-a}^{a}h(\xi,\cos\theta)I(\xi)d\xi.$$

Таким образом, функцию $f(t)$ необходимо интерпретировать как функцию угловых сферических координат.

Опишем типичные ограничения, накладываемые на функцию $f\left(t\right)$:

1) на промежутке $[0,\pi]$ выделяются две области: зона центрального лепестка $\Delta_0=[\pi/2-d_0,\pi/2+d_0]$ и зона боковых лепестков $\Delta_1=[0,\pi/2-d_1]\cup$ $\cup[\pi/2+d_1,\pi/2]$;

2) $|f(x)|\le M_0, x\in\Delta_1$;

3) $|f(x)|\le\frac{M_0}{m}, x\in[0,\pi]\setminus(\Delta_0\cup\Delta_1)$;

4) на Δ_0 функция $f(x)$ должна быть остро направленной:

$$0<M_1\le|f(x)|\le M_2<\infty,\ \lim_{x\to\pi/2}|f^{(v)}(x)|=\infty, v=1,2,...$$

Одной из важнейших характеристик, учитываемых при конструировании антенн, является их волновой размер. В данной работе этому вопросу уделяется особое внимание. В частности, проведено исследование антенн на совершенном множестве Кантора. Как было показано в работах многочисленных авторов, при использовании в качестве топологии антенны фрактальных множеств, антенна сохраняет все свои характеристики при меньшем занимаемом объеме.

Отметим, что приведенная выше постановка задачи синтеза антенны ранее не применялась к антеннам с фрактальной топологией.

В работе исследуются задачи синтеза антенн на предфракталах Кантора и Серпинского. Рассмотрены случаи расположения областей раскрыва антенн как в случайном порядке, так и упорядоченным образом.

Такая постановка задачи включает случай, когда антенна состоит из нескольких отдельно расположенных вибраторов, сообща генерирующих заданный сигнал.

Для задачи миниатюризации естественно определить уравнение (2.54) на фрактальных множествах различных размерностей.

В работе исследуется возможность создания антенн на разных множествах, включающих в себя совершенное множество Кантора и «ковер» Серпинского.

Таким образом, задача конструирования антенн приводит к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода, определенных на различных множествах.

Из условий технической реализации вытекают дополнительные ограничения:

1) решение в заданной области должно быть положительным или равным нулю в некоторых точках;

2) решение должно быть ограничено по модулю.

В итоге приходим к задаче решения уравнения

$$\int_C h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), t\in[0,\pi], \tag{2.55}$$

при условии

$$0 \le x(t) \le M, t\in C, \tag{2.56}$$

где $C-$ некоторое многообразие, обусловленное конструкцией антенны, причем C также может быть кластером дискретных источников возбуждения.

Ниже рассмотрены несколько математических моделей с фрактальной топологией, а именно с топологией «пыли» Кантора и «ковра» Серпинского. Так как в рассматриваемой математической модели в случае антенны с топологией «пыли» Кантора все излучатели располагаются на одном уровне, имеют одинаковый радиус, то в этом случае уравнение (2.54) можно рассматривать как одномерное интегральное уравнение, хотя физически раскрыв антенны и является двумерным. В случае решения обратной задачи теории антенн для антенны с топологией «ковра» Серпинского подобных допущений уже нет, поэтому уравнение (2.54) рассматривается как двумерное интегральное уравнение.

Для решения обратной задачи теории с топологией «пыли» Кантора и «ковра» Серпинского ниже предлагается несколько вычислительных схем.

2.3.2. Математическая модель обратной задачи теории антенн с топологией фрактала Кантора

Для простоты изложения метода ограничимся рассмотрением уравнения

$$\int_C h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\ t\in[0,1], \tag{2.57}$$

при условии (2.56).

В этом уравнении ядро $h(t,\tau)$ является гладкой функцией. Уравнение (2.57) в общем случае является некорректной задачей, и для его решения необходима регуляризация. При решении этого уравнения регуляризация достигается за счет используемого метода локальных поправок.

Множество C в уравнении (2.57) представляет собой предфрактал n -го порядка множества Кантора.

Сначала рассмотрим применение метода механических квадратур для решения уравнения (2.57).

Приближенное решение уравнения (2.57) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\psi_k(t), \tag{2.58}$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t\in\Delta_k, \\ 0, & t\in[0,1]\setminus\Delta_k, \end{cases}$$

$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}),\quad k = 0,1,\ldots,n-2,\quad \Delta_{n-1} = [t_{n-1},1],\quad t_k = k/n, k = 0,1,\ldots,n;\quad t_k$ – начало t_k -го сегмента фрактала C.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, определяются из системы уравнений

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(t_l,t_k)\alpha_k = f(t_l), l = 0,1,\ldots,n-1. \quad (2.59)$$

Введем проектор $P_M[f;[a,b]]$, где $f(x)$ – функция действительной переменной, $x \in [a,b] \subset [0,1]$.

Оператор $P_M[f,[a,b]]$ действует по формуле

$$P_M[f,[a,b]] = \begin{cases} 0, f(x) \le 0, \\ f(x), 0 \le f(x) \le M, \\ M, f(x) \ge M. \end{cases}$$

Будем использовать обозначение P_M в случае, если из контекста ясно, для какой функции и на каком сегменте применяется оператор $P_M[f,[a,b]]$.

Для решения системы уравнений (2.59) предлагается модификация метода локальных поправок.

Метод локальных поправок состоит из следующих этапов:

1) берем начальное приближение

$$x_n^0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^0 \psi_k(t);$$

2) для каждого узла t_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$, находим модуль разности

$$|\varepsilon_k^0| = |f(t_k) - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} h(t_k,t_l)\alpha_l^0|, k = 0,1,\ldots,n-1;$$

3) находим максимальную погрешность $\varepsilon_*^0 = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \varepsilon_k^0$. Пусть она достигается на элементе $x_{i^*}^0 = \alpha_{i^*}^0 \psi_{i^*}(t)$;

4) исследуем влияние каждой компоненты вектора $\{\alpha_l\}$, $l = 0,1,\ldots,n-1$, на величину ε_*^0. Для этого последовательно каждой компоненте α_l^0 вектора $\{\alpha^0\}$, $l = 0,1,\ldots,n-1$, дадим виртуальное приращение δ.

Для элемента α_j^0 получаем:

$$|f(t_{i^*})-\frac{1}{n}\sum_{k=0 k\neq j}^{n-1}h(t_{i^*},t_k)\alpha_k-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j)(\alpha_j^0+\delta)|=$$

$$=|f(t_{i^*})-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h(t_{i^*},t_k)\alpha_k-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j)\delta|=$$

$$=|\varepsilon_{i^*}^0-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j)\delta|.$$

Пусть $\delta=\mathrm{sgn}(\varepsilon_{i^*}^0/h(t_{i^*},t_j))\delta_0$, при $h(t_{i^*},t_j)\neq 0$.

При этом δ_0 должно удовлетворять условию $|\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j)\delta_0|<\varepsilon_{i^*}^0$. Обозначим

$$\varepsilon^0(i^*,j)=|\varepsilon_i^0-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j)\mathrm{sgn}(\varepsilon_{i^*}^0/h(t_{i^*},t_j))\delta_0|.$$

В случае если $h(t_{i^*},t_j)=0$, элемент α_j^0 исключается из дальнейшего рассмотрения на четвертом шаге.

Найдем значение j^*, при котором

$$\varepsilon^0(i^*,j^*)=\max_{0\leq j\leq n-1}\varepsilon^0(i^*,j);$$

5) приступим к выбору первой поправки. Положим $\alpha_j^1=\alpha_j^0$ при $j\neq j^*$. При $j=j^*$ положим $\alpha_{j^*}^1=\alpha_{j^*}^0+\beta_{j^*}^1$. Значение $\beta_{j^*}^1$ находим из решения уравнения

$$0=|f(t_{i^*})-\frac{1}{n}\sum_{k=0 k\neq j^*}^{n-1}h(t_{i^*},t_j)\alpha_j^0-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j^*)(\alpha_{j^*}^0+\beta_{j^*}^1)|=$$

$$=|f(t_{i^*})-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h(t_{i^*},t_j)\alpha_j^0-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j^*)\beta_{j^*}^1|=$$

$$=|\varepsilon^0(i^*)-\frac{1}{n}h(t_{i^*},t_j^*)\beta_{j^*}^1|.$$

Отсюда

$$\beta^1_{j^*} = n\varepsilon^0_{i^*} / h(t_{i^*}, t_{j^*}).$$

Положим

$$\alpha^1_j = \begin{cases} \alpha^0_j, & j \neq j^*, \\ P_M\left[\alpha^0_{j^*} + \beta^1_{j^*}\right], & j = j^*. \end{cases}$$

Затем возвращаемся к первому шагу, используя вместо начального приближения $x^0_n(t)$, полученное первое приближение:

$$x^1_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^1_k \psi_k(t).$$

Замечание. Если в следующем цикле экстремальным оказывается значение t_{J^*}, то j^*-я компонента блокируется и цикл повторяется для $j = 0,1,\ldots,n-1, j \neq j^*$. После этого при выполнении вычислений снова рассматриваются все индексы $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Окончание итерационного процесса может осуществляться различными способами. Например, выход из цикла по достижению нужной погрешности или по достижению некоторого заданного максимального количества итераций.

Возможен случай, когда на некотором l шаге итерационного процесса значение ε^l_* достигается при нескольких значениях $i^*_1, i^*_2, \ldots, i^*_k$. Рассмотрим, что происходит в этом случае. Для этого ограничимся случаем, когда ε^l_* достигается при двух значениях i^*_1, i^*_2. Если ε^l_* достигается более чем на двух значениях i^*_1, i^*_2, то алгоритм аналогичен.

Найдем значения j^*_1 и j^*_2, оказывающие наибольшее влияние на ε^l_* для каждого из значений i^*_1 и i^*_2. Затем найдем поправки $\beta^l_{j^*_1}$ и $\beta^l_{j^*_2}$.

Поправки будем искать из решения системы уравнений

$$0=\Bigg| f(t_{i_1^*})-\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j_1^*,j_2^*}}^{n-1} h(t_{i_1^*},t_k)\alpha_k^l-\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_1^*})(\alpha_{j_1^*}^l+\beta_{j_1^*}^l)-$$

$$-\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_2^*})(\alpha_{j_2^*}^l+\beta_{j_2^*}^l)\Bigg|=\left|\varepsilon_*^l-\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_1^*})\beta_{j_1^*}^l+\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_2^*})\beta_{j_2^*}^l\right|;$$

$$0=\Bigg| f(t_{i_1^*})-\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq j_1^*,j_2^*}}^{n-1} h(t_{i_2^*},t_k)\alpha_k^l-\frac{1}{n}h(t_{i_2^*},t_{j_1^*})(\alpha_{j_1^*}^l+\beta_{j_1^*}^l)-$$

$$-\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_2^*})(\alpha_{j_2^*}^l+\beta_{j_2^*}^l)\Bigg|=$$

$$=\left|\varepsilon_*^l-\frac{1}{n}h(t_{i_1^*},t_{j_1^*})\beta_{j_1^*}^l-\frac{1}{n}h(t_{i_2^*},t_{j_2^*})\beta_{j_2^*}^l\right|.$$

Получив значения поправок $\beta_{j_1^*}^l$ и $\beta_{j_2^*}^l$, имеем $\alpha_k^{l+1}=\alpha_k$ при $k\neq j_1^*,j_2^*$, $\alpha_{j_1^*}^{l+1}=P_M\left[\alpha_{j_1^*}^l+\beta_{j_1^*}^l\right]$, $\alpha_{j_2^*}^{l+1}=P_M\left[\alpha_{j_2^*}^l+\beta_{j_2^*}^l\right]$.

Замечание. Для того чтобы итерационный процесс на l-м шаге был устойчивым, в качестве поправок $\beta_{j_1^*}^l$ и $\beta_{j_2^*}^l$ лучше взять $\beta_{j_1^*}^l/10$ и $\beta_{j_2^*}^l/10$ или даже поправки с большими делителями для того, чтобы выполнялось условие $\varepsilon_*^{l+1}<\varepsilon_*^l$. Перед окончательным выбором значений $\alpha_{j_1}^{l+1}$ и $\alpha_{j_2}^{l+1}$ нужно вычислить значение ε_*^{l+1} и убедиться, что выполняется условие $\varepsilon_*^{l+1}<\varepsilon_*^l$. В случае если это условие не выполняется, нужно уменьшать модули $|\beta_{j_1^*}^l|$ и $|\beta_{j_2^*}^l|$ до тех пор, пока не будет достигнуто выполнение этого условия.

Результаты синтеза антенн методом локальных поправок на предфрактале совершенного множества Кантора приведены в главе 4.

2.3.3. Математическая модель обратной задачи теории антенн с топологией фрактала Серпинского

Пусть антенна имеет топологию «ковра» Серпинского, тогда для простоты можно ограничиться рассмотрением уравнений

$$\iint_{\Omega_n} h(t,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t),\ t\in[0,1], \tag{2.60}$$

$$\iint_{\Omega_n} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2),\ (t_1,t_2)\in[0,\pi]^2, \tag{2.61}$$

где множество Ω_n является предфракталом n -го порядка фрактала «ковер» Серпинского, определенного в квадрате $[0,1]^2$.

В уравнении (2.61) ядро $h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)$ является гладкой функцией. Уравнение (2.57) в общем случае является некорректной задачей, и для его решения необходима регуляризация. При решении этого уравнения регуляризация достигается за счет используемого метода локальных поправок.

Рассмотрим уравнение (2.61).

Введем следующие обозначения:

$$v_k = k/n,\ k=0,1,\dots,n;\ \Delta_{kl}=[v_k,v_{k+1})\times\times[v_l,v_{l+1}),\ k=0,1,\dots,n-2,\ l=0,1,\dots,n-2,$$
$$\Delta_{n-1,l}=[v_{n-1},v_n]\times[v_l,v_{l+1}),\ l=0,\dots,n-2,\ \Delta_{k,n-1}=[v_k,v_{k+1})\times[v_{n-1},v_n],$$
$$k=0,1,\dots,n-2,\ \Delta_{n-1,n-1}=[v_{n-1},v_n;v_{n-1},v_n].$$

Приближенное решение уравнения (2.61) будем искать в виде функции

$$x_{nn}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{kl}\Psi_{kl}(t_1,t_2),$$

где

$$\Psi_{kl}(t_1,t_2)=\begin{cases}1, & (t_1,t_2)\in\Delta_{kl},\\ 0, & (t_1,t_2)\in[0,1]^2\setminus\Delta_{kl},\end{cases}\quad k,l=0,1,\dots,n-1.$$

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}, k,l=0,1,...,n-1,$ приближенного решения $\{x_{nn}\}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} h(v_i, v_j, v_k, v_l)\alpha_{kl} = f(v_i, v_j), i, j = 0,1,...,n-1. \quad (2.62)$$

Для решения системы (2.62) применен описанный выше метод локальных поправок.

Результаты моделирования антенн методом локальных поправок на предфрактале ковра Серпинского приведены в главе 4.

Основные результаты и выводы по главе 2

Предложены три вычислительных алгоритма решения интегрального уравнения (2.1), используемого при построении диаграммы направленности антенны.

Построены и обоснованы вычислительные алгоритмы решения уравнений Поклингтона и Галлена теории антенн (три вычислительные схемы для уравнения Поклингтона и одна для уравнения Галлена). В основу построения вычислительных алгоритмов положен метод коллокации и непрерывный метод решения операторных уравнений.

Построен алгоритм синтеза антенн в первом приближении с фрактальной топологией совершенного множества Кантора и «ковра» Серпинского, основанный на приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Модифицирован метод локальных поправок для решения уравнений Фредгольма первого рода на фрактальных многообразиях.

Результаты главы 2 были представлены в следующих статьях [4, 15, 18, 22, 25, 94].

ГЛАВА 3
ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ФРАКТАЛАХ

В главе построены и обоснованы приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах с топологией совершенного множества Кантора и «ковра» Серпинского. Выбор этих топологий обусловлен тем, в что в настоящее время они получили наибольшее распространение при конструировании фрактальных антенн и необходима разработка численных методов математического моделирования этих антенн.

3.1. Численные алгоритмы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале Кантора

Опишем процесс построения фрактала Кантора. На участке $C_0 = [0,1]$ удаляется интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, оставляя множество $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. На следующей итерации отбрасываем среднюю часть каждого из полученных на предыдущем шаге интервалов. Получим множество C_2, состоящее из четырех сегментов $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Данный процесс продолжаем до бесконечности, получая на каждом шаге множества $C_3, C_4, \ldots$ Предельное множество C, представляющее собой пересечение множеств C_n, $n = 0, 1, \ldots$, является совершенным множеством Кантора (на рисунке 3.1 представлены предфракталы с 1 по 4 поколения совершенного множества Кантора). Сегменты, составляющие n-й предфрактал, обозначим через $\Delta_i = \left[t_i^i, t_{i+1}^i\right]$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, где t_i^i – начало i-го сегмента; t_{i+1}^i – конец i-го сегмента. Также введем точку t_i^1, которая находится в середине сегмента Δ_i.

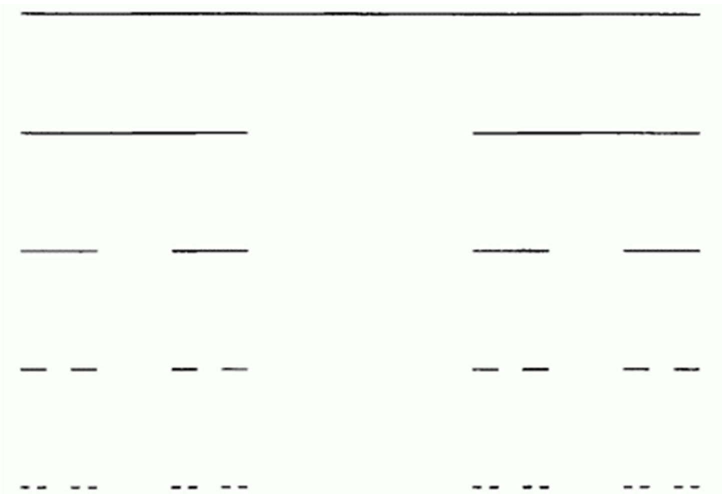


Рисунок 3.1 – Процесс построения фрактала Кантора

Рассмотрим n-й предфрактал совершенного множества Кантора при достаточно большом n, на котором определено гиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t)+b(t)\int\limits_{C_n}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau+\int\limits_{C_n}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ t\in C_n,\ p=2,3,... \qquad (3.1)$$

Уравнение (3.1) будем решать методом коллокаций, вычисляя функцию решения в виде кусочно-постоянной функции и полигона.

Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\psi_i(t),$$

$$\psi_i(t)=\begin{cases}1,\ t\in\Delta_i,\\ 0,\ t\in[0,1]\setminus\Delta_i,\end{cases}\quad i=1,\ldots,N,\ N=2^n,$$

где $\Delta_i = \left[t_i^i, t_{i+1}^i\right]$ – соответственно i-й участок n-го предфрактала совершенного множества Кантора; $N = 2^n$ – количество сегментов в n-м предфрактале.

В качестве узлов коллокации возьмем точки $t_k^1 \in \Delta_k$, которые являются средними точками каждого сегмента n-го предфрактала совершенного множества Кантора.

Приравняв левые и правые части уравнения (3.1) в точках t_k^1, приходим к системе уравнений:

$$a(t_i)\alpha_i + b(t_i)\sum_{j=0}^{N}\alpha_j \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - t_i)^p} d\tau + \frac{1}{3^n}\sum_{j=0}^{N} h(t_i, t_j)\alpha_j = f(t_i),\ i = 1,...,N, \tag{3.2}$$

из решения которой определяем неизвестные коэффициенты $\{\alpha_i\}, i = \overline{1, N}$.

Проведем обоснование метода коллокаций в пространстве $\left(N = 2^n\right)$-мерных векторов $x = \left(x_1, x_2, ..., x_{2^n}\right)$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le 2^n} |x_k|$.

При обосновании вычислительной схемы (3.2) будем считать выполненными следующие условия: $b(t_i) \ge \alpha > 0,\ i = 1,...,N$. Отметим, что если $\inf\limits_{0 \le t \le 1} \left|b(t_i)\right| = \alpha$, то это условие всегда выполнено.

Запишем систему уравнений (3.2) в матричной форме:

$$CX = F,$$

где $X = \{\alpha_1, ...\alpha_N\}$, $F = \{f(t_1), ..., f(t_N)\}$, структура вектора C очевидна.

Чтобы доказать однозначную разрешимость системы уравнений (3.2), используем утверждение 1.1 (Лозинского), приведенное в разд. 1.6. Для выполнения условий этой теоремы необходимо оценить логарифмическую норму матрицы C.

Вначале оценим диагональные элементы C_{ll} матрицы C. Для этого вычислим интеграл $\int\limits_{\Delta_i} \frac{d\tau}{(\tau - t_i)^p}$. В результате получаем

$$\int\limits_{\Delta_i} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i\right)^p} = \int\limits_{-\frac{1}{2\cdot 3^n}}^{\frac{1}{2\cdot 3^n}} \frac{d\tau}{\tau^p} = -\frac{2}{p-1}\left(2\cdot 3^n\right)^{p-1}.$$

Диагональные элементы C_{ll} матрицы C равны

$$C_{ll} = -\frac{2b\left(t_l\right)}{p-1}\left(2\cdot 3^n\right)^{p-1} + \left(a\left(t_l\right) + \frac{1}{3^n}h\left(t_l, t_l\right)\right),\ l = 1, 2, ..., \ N. \qquad (3.3)$$

Оценим сумму модулей внедиагональных элементов $C_{li},\ l \neq i,$ матрицы C. При этом достаточно ограничиться рассмотрением элементов одной строки матрицы C . Рассмотрим первую строку

$$I_1 = \left|b\left(t_1\right)\right| \sum_{j=1}^{N}{}' \left| \int\limits_{\Delta_j} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_1\right)^p} \right| + \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{N}{}' \left| h\left(t_1, t_j\right) \right|,$$

где $\sum\limits_{j=1}^{n}{}'$ означает суммирование по $j \neq 0$.

Оценка суммы $\left|b\left(t_1\right)\right| \sum\limits_{j=1}^{N}{}' \left| \int\limits_{\Delta_j} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_1\right)^p} \right|$ в выражении I_1 является сложной задачей, однако ее можно упростить (значительно угрубляя), переходя к интегралу

$$I_1 \le \left|b\left(t_1\right)\right| \int\limits_{\frac{2}{3^n}}^{1} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_1\right)^p} \le \left|b\left(t_1\right)\right| \frac{1}{p-1}\left(\frac{2\cdot 3^n}{3}\right)^{p-1}.$$

Распространяя эту оценку на остальные строки матрицы C, получим оценку суммы внедиагональных элементов:

$$I_i \le \left|b\left(t_i\right)\right| \int\limits_{\frac{2}{3^n}}^{1} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i\right)^p} \le \left|b\left(t_i\right)\right| \frac{2}{p-1}\left(\frac{2\cdot 3^n}{3}\right)^{p-1}. \qquad (3.4)$$

Перейдем к оценке логарифмической нормы. Используя неравенства (3.3), (3.4), получаем, что логарифмическая оценка матрицы C в метрике пространства R_N с нормой $N=2^n$ оценивается неравенством

$$\Lambda(C) \le \max_i \left(\frac{2}{p-1}\left(2\cdot 3^n\right)^{p-1} \left|b(t_i)\right| \left(-1+\frac{1}{3^{p-1}}\right) + \left(a(t_i)+\frac{1}{3^n}h(t_i,t_i)\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что при достаточно большом n логарифмическая норма матрицы C отрицательна. Следовательно, согласно утверждению 1.4 система (3.2) однозначно разрешима.

Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\inf\limits_{0\le t\le 1}\left|b(t)\right| \ge \alpha > 0$;

2) $\max\left(\sup\limits_{0\le t\le 1}\left|a(t)\right|,\ \sup\limits_{0\le t\le 1}\left|b(t)\right|,\ \sup\limits_{\substack{0\le t\le 1\\ 0\le \tau\le 1}}\left|h(t,\tau)\right| \right) \le M$.

Тогда при достаточно больших n система уравнений (3.2) однозначно разрешима.

Выше была доказана однозначная разрешимость вычислительной схемы (3.2). Модельные примеры продемонстрировали сходимость решения приближенных уравнений к точному решению. Однако теоретическое обоснование сходимости решения приближенного уравнения к точному в случае метода коллокаций с кусочно-постоянной аппроксимацией получить не удалось. Это обусловлено тем, что для доказательства сходимости решений систем приближенных уравнений к точному решению исходного уравнения необходимо, чтобы аппроксимация точного решения подпространством, которому принадлежит приближенное решение, имело погрешность $o\left(N^{-p}\right)$, где N – размерность подпространства.

Для того чтобы построить полностью обоснованный вычислительный процесс, перейдем к построению более сложной вычислительной схеме.

Напомним [46], что под полным обоснованием вычислительной схемы понимается доказанность однозначной разрешимости и стремления решения приближенного уравнения к точному решению исходного уравнения.

Вторая вычислительная схема

Для простоты ограничимся следующим уравнением:

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{C_n}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=f(t),\ t\in C_n. \tag{3.5}$$

Это не влияет на общую часть рассуждений, так как «отбрасываемый» оператор является компактным.

Введем узлы коллокации:

$$t_i^1=t_i^0+\frac{1}{3^{2n}},\ t_i^2=t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}},$$

где t_i^0 – соответственно левая граница каждого сегмента предфрактала совершенного множества фрактала Кантора.

Приближенное решение уравнения (3.5) будем искать в виде полигона:

$$x_n(t)=\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{l,i}\psi_{l,i}(t),\ t\in C_n, \tag{3.6}$$

с базисными функциями

$$\psi_{l,i}(t)=\begin{cases} g_{l,i}(t),\ t\in\Delta_i,\\ 0,\ t\in[0,1]\setminus\Delta_i,\end{cases}$$

$$g_{1,i}(t)=\begin{cases} 1,\ t_i^1\le \mathrm{t}\le t_i^1+\dfrac{1}{3^{2n}},\\ \dfrac{3^{2n}\left(t-t_i^1\right)-3^n+1}{2-3^n},\ t_i^1+\dfrac{1}{3^{2n}}\le t\le t_i^1+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{2n}},\\ 0,\ t_i^1+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{2n}}\le t\le t_i^1+\dfrac{1}{3^n},\end{cases}$$

$$g_{2,i}(t)=\begin{cases}0,\ t_i^2\le \mathrm{t}\le t_i^2+\dfrac{1}{3^{2n}},\\ \dfrac{3^{2n}\left(t-t_i^2\right)-1}{3^n-2},t_i^2+\dfrac{1}{3^{2n}}\le t\le t_i^2+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{2n}},\\ 1,\ t_i^2+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{3^{2n}}\le t\le t_i^2+\dfrac{1}{3^n}.\end{cases}$$

Аналогичным образом строятся функции $g_{l,i}$ на интервалах $\Delta_{l,i},\ i=2,...,2^n$.

Подставив $x_n(t)$ в уравнение (3.5) и приравняв в узлах t_i^1 и t_i^2 левые и правые части уравнения (3.5), получим систему линейных алгебраических уравнений 2^{n+1} порядка, где n – число итераций предфрактала совершенного множества Кантора

$$a\left(t_i^l\right)\alpha_i+b\left(t_i^l\right)\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{l,j}\int\limits_{\Delta_j}\frac{\psi_{l,j}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^l\right)^2}=f\left(t_i^l\right),\ l=1,2,\ i=1,...,n. \qquad (3.7)$$

Докажем однозначную разрешимость системы уравнений (3.7) и оценим величину погрешности.

Прежде всего докажем сходимость вычислительной схемы (3.7) в пространстве R_n^2 векторов $u=\left(u_1,...,u_{2n}\right)$ с нормой $\|u\|_1=\max\limits_{1\le k\le 2n}|u_k|$.

Для доказательства воспользуемся теоремой Адамара об обратимости матриц (разд. 1.6). Запишем систему (3.7) в матричном виде $\overline{C}X=\overline{F}$. Структура матрицы $\overline{C}$ и векторов X и $\overline{F}$ очевидны.

Для удобства в проведении выкладок введем следующую сетку узлов:

$$t_i^3,\ i=1,...,2n\ ,\ t_i^3=\begin{cases}t_i^1,\ i=1,...n,\\ t_i^2,\ i=n+1,...,2n.\end{cases}$$

Проверим выполнение условий теоремы Адамара для матрицы $\overline{C}$. Вначале оценим диагональные элементы, которые имеют вид

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|,\ i=1,\dots,2n.$$

Для определенности рассмотрим случай $1\le i\le n$. Очевидно,

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|\le a^*+$$

$$+b^*\left(\int\limits_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^1\right)-3^n+1}{2-3^n}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^2\right)-1}{3^n-2}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}\right).$$

Так как $i=1,\dots,n$, то $t_i^3=t_i^1=t_i^0+\dfrac{1}{3^{2n}}$, тогда

$$\int\limits_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}=\int\limits_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=\int\limits_{-\frac{1}{3^{2n}}}^{0}\frac{d\tau}{\tau^2}=-3^{2n},$$

$$\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^1\right)-3^n+1}{2-3^n}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{2-3^n}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{2-3^n}\right)\int\limits_0^{\frac{1}{3^n}-\frac{2}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\tau^2}=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\int\limits_0^{\frac{1}{3^n}-\frac{2}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\tau}+\left(1-\frac{1}{2-3^n}\right)\left(\frac{3^{2n}}{3^n-2}\right)=$$

$$=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\ln\left(\frac{1}{3^n}-\frac{2}{3^{2n}}\right)+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\frac{\ln\left(\frac{1}{3^n}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3^{2n}}\right)}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\frac{-\ln\left(3^n\right)}{-\ln\left(\frac{3^{2n}}{2}\right)}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2},$$

$$\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^2\right)-1}{3^n-2}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}-\frac{1}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\left(\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)}+\frac{3^n}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\ln\left(\frac{1}{3^n}-\frac{2}{3^{2n}}\right)+\left(1+\frac{1}{3^n-2}\right)\left(\frac{3^{2n}}{3^n-2}\right)=$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2},\quad \int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^1\right)^2}=\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}\right)\right)^2}=3^{2n}.$$

Получаем

$$\left\|\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right\|\le$$

$$\le -3^{2n}+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}+\frac{3^{2n}}{3^n-2}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}+3^{2n}=$$

$$=2\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2};$$

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|\le\left|a^*+b^*\cdot 2\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}\right|.$$

Пусть $i=n+1,\dots,2n$, тогда

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|\le a^*+$$

$$+b^*\left(\int\limits_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^2\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^2\right)-3^n+1}{2-3^n}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^2\right)-1}{3^n-2}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^2\right)^2}\right).$$

Так как $i = n+1,\dots,2n$, то $t_i^3 = t_i^2 = t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}$, тогда

$$\int_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i^3\right)^2} = \int_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}} \frac{d\tau}{\left(\tau - \left(t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2} = -3^n + \frac{3^{2n}}{3^n - 1},$$

$$\int_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}} \frac{3^{2n}\left(\tau - t_i^1\right) - 3^n + 1}{2 - 3^n} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i^3\right)^2} =$$

$$= \int_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}} \frac{3^{2n}\left(\tau - \left(t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}\right)\right) - 2 + 3^n + 3^n + 1}{2 - 3^n} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}\right)^2} =$$

$$= \frac{3^{2n}}{2 - 3^n} \int_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}} \frac{d\tau}{\tau - \left(t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}\right)} + \frac{2\cdot 3^n - 1}{2 - 3^n} \int_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}} \frac{d\tau}{\left(\tau - \left(t_i^0 + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2} =$$

$$= -\frac{3^{2n}}{2 - 3^n} \ln\left(\frac{2}{3^{2n}} - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{2\cdot 3^n - 1}{2 - 3^n} \frac{3^{2n}}{2 - 3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n - 2} \left(\frac{-\ln\left(\frac{3^{2n}}{2}\right)}{-\ln\left(3^n\right)} + \frac{2\cdot 3^n - 1}{2 - 3^n} \right) =$$

$$= \frac{3^{2n}}{3^n - 2} \left(\frac{\ln\left(3^{2n}\right) - \ln(2)}{\ln\left(3^n\right)} + \frac{2\cdot 3^n - 1}{2 - 3^n} \right),$$

$$\int_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}} \frac{3^{2n}\left(\tau - t_i^2\right) - 1}{3^n - 2} \frac{d\tau}{\left(\tau - t_i^2\right)^2} =$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}-\frac{1}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)}-\frac{1}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)^2}=$$

$$=-\frac{3^{2n}}{2-3^n}\ln\left(\frac{2}{3^{2n}}-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{3^n-2}\cdot\frac{3^{2n}}{3^n-2}=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\left(\frac{\ln\left(3^{2n}\right)-\ln(2)}{\ln\left(3^n\right)}+\frac{1}{3^n-2}\right),$$

$$\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_i^2\right)^2}=-3^{2n}.$$

Получаем

$$\left\|\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right\|\le$$

$$\le-3^{2n}+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}+\frac{3^{2n}}{3^n-2}\frac{\ln 3^n}{\ln 3^{2n}-\ln 2}+\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}-$$

$$-3^n+\frac{3^{2n}}{3^n-2}=-3^{2n}+2\frac{3^{3n}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}-3^n+\frac{3^{2n}}{3^n-2}=-3^n\left(3^n+1\right)+$$

$$+2\frac{3^{3n}-3^{2n}+\frac{3^{3n}}{2}-3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}=-3^n\left(3^n+1\right)+\frac{3^{3n+1}-4\cdot 3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2},$$

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|\le a^*+b^*\left(-3^n\left(3^n+1\right)+\frac{3^{3n+1}-4\cdot 3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}\right).$$

Перейдем к оценке суммы внедиагональных элементов, которые имеют вид

$$\left|b\left(t_i^3\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^3\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^3\right)^2}\right)\right|,\ i=1,\dots,2n.$$

Для внедиагональных элементов расположение особой точки (ближе к левому или правому краю сегмента) играть особой роли не будет, поэтому рассматривать оба случая не будем.

Тогда

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}\left(\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}+\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}\right)\right|\le\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}\right|=\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}I_1+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}I_2\right|.$$

Рассмотрим первый интеграл на одном из сегментов:

$$\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}=\int\limits_{t_i^0}^{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^1\right)-3^n+1}{2-3^n}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0-t_j^1}\right)+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\ln\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{t_{i+1}^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right)-\frac{1}{2-3^n}\left(\frac{1}{t_{i+1}^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0-t_j^1}\right)+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\frac{1}{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2-3^n}\left(\frac{1}{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right).$$

Своего наибольшего значения внедиагональный элемент достигнет в том случае, когда узел t_j будет находиться ближе всего к особой точке t_i, т.е. при $j=i-1$ или $j=i+1$. Так как эти точки располагаются на одинаковом расстоянии от особой точки, то мы имеем право рассмотреть любую из них.

Остановимся на точке t_{i-1}.

Тогда $t_i^0-t_j^1=\frac{3}{2\cdot 3^n}$, $t_{i+1}^0-t_j^1=\frac{5}{2\cdot 3^n}$ первый интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}\le\left(\frac{1}{\frac{3}{2\cdot 3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{1}{\frac{3}{2\cdot 3^n}}\right)+$$

$$+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\frac{1}{\frac{5}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{1}{\frac{3}{2\cdot 3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}\right)-\frac{1}{2-3^n}\left(\frac{1}{\frac{5}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{1}{\frac{3}{2\cdot 3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}\right)\le$$

$$\le\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}+2}-2\cdot 3^{n-1}+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n-2}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}+2}\right)-\frac{1}{2-3^n}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n-2}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}+2}\right)\le$$

$$\le\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}}-2\cdot 3^{n-1}+\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}}\right)-\frac{1}{2-3^n}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3^{n+1}}\right)\le$$

$$\le 2\cdot 3^{n-1}-2\cdot 3^{n-1}-\frac{3^{2n}}{2-3^n}\cdot\frac{1}{5}\cdot 3^n+\frac{1}{2-3^n}\cdot\frac{4}{15}\cdot 3^n\le$$

$$\le\frac{3^{2n}}{3^n}\cdot\frac{1}{5}\cdot 3^n-\frac{1}{3^n}\cdot\frac{4}{15}\cdot 3^n\le\frac{3^{2n}}{5}.$$

Перейдем к рассмотрению второго интеграла:

$$\int\limits_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}=\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{3^{2n}\left(\tau-t_i^2\right)-1}{3^n-2}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}+\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}\Bigg)=$$

$$=\frac{3^{2n}}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{\left(\tau-\left(t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}-\frac{1}{3^n-2}\int\limits_{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}}^{t_i^0+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}\frac{d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}=$$

$$=\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\ln\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{t_j^1}{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}+\frac{t_j^1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}}{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right)+\frac{1}{3^n-2}\left(\frac{1}{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}-\frac{1}{t_i^0+\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1}\right)\le$$

$$\le\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\ln\frac{\frac{5}{2\cdot3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{3}{2\cdot3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{t_j^1}{\frac{5}{2\cdot3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}+\frac{t_j^1}{\frac{3}{2\cdot3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{5}{2\cdot3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{3}{2\cdot3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}\right)+\frac{1}{3^n-2}\left(\frac{1}{\frac{5}{2\cdot3^n}-\frac{1}{3^{2n}}}-\frac{1}{\frac{3}{2\cdot3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}\right)\le$$

$$\le\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\ln\frac{5\cdot3^n-2}{3\cdot3^n+2}-t_j^1\frac{2\cdot3^{2n}}{5\cdot3^n-2}+t_j^1\frac{2\cdot3^{2n}}{3\cdot3^n+2}+\left(t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}\right)\frac{2\cdot3^{2n}}{5\cdot3^n-2}-\right.$$

$$\left.-\left(t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}\right)\frac{2\cdot3^{2n}}{3\cdot3^n+2}\right)+\frac{1}{3^n-2}\left(\frac{2\cdot3^{2n}}{5\cdot3^n-2}-\frac{2\cdot3^{2n}}{3\cdot3^n+2}\right)\le$$

$$\le\frac{3^{2n}}{2-3^n}\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{2\cdot3^{2n}}{5\cdot3^n-2}\left(t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1\right)-\frac{2\cdot3^{2n}}{3\cdot3^n+2}\left(t_{i+1}^0-\frac{1}{3^{2n}}-t_j^1\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{3^n-2}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n-2}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3\cdot 3^n+2}\right)\le\frac{3^{2n}}{3^n}\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n}\left(\frac{3}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3\cdot 3^n}\left(\frac{3}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right)+\frac{1}{3^n}\left(\frac{2\cdot 3^{2n}}{5\cdot 3^n}-\frac{2\cdot 3^{2n}}{3\cdot 3^n}\right)\le 3^n\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{2}{5}3^n\left(\frac{3\cdot 3^n-2}{2\cdot 3^n}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\cdot 3^n\left(\frac{3\cdot 3^n-2}{2\cdot 3^n}\right)\right)+\frac{1}{3^n}\left(\frac{2}{5}3^n-\frac{2}{3}3^n\right)\le 3^n\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{3}{5}3^n-2\frac{2}{3}3^n+2\right)-\frac{4}{15}\le$$

$$\le 3^n\left(\ln\frac{5}{3}-\frac{4}{15}3^n+2\right)-\frac{4}{15}.$$

Таким образом, для внедиагональных элементов имеем следующую оценку:

$$b*\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{2n}\left(\int_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}+\int_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_j^1\right)^2}\right)\right|\le(2n-1)b^*\left(\frac{3^{2n}}{5}+3^n\left(\ln\frac{5}{3}-\frac{4}{15}3^n+2\right)-\frac{4}{15}\right),$$

а для диагонального элемента:

$$\left|a\left(t_i^3\right)+b\left(t_i^3\right)\left(\int_{\Delta_i}\frac{g_{1,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}+\int_{\Delta_i}\frac{g_{2,i}(t)\,d\tau}{\left(\tau-t_i^3\right)^2}\right)\right|\le$$

$$\le a^*+b^*\left(-3^n\left(3^n+1\right)+\frac{3^{3n+1}-4\cdot 3^{2n}}{\left(3^n-2\right)^2}\right).$$

Подытожив полученные оценки, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) $|a(t)|,\ |b(t)|\le M,\ M<\infty,\ t\in[-1,1]$;

2) $|b(t)|\ge\beta>0$ при $t\in[-1,1]$;

3) уравнение (3.1) имеет единственное решение $x^*(t)\in W^2(M_1),\ M_1=const.$

Тогда существует единственное решение $x_n^*(t)$ уравнения (3.5) и справедлива оценка $\left\|x^*(t)-x_n^*(t)\right\|<C\frac{1}{3^n}$.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале «ковер» Серпинского

Пусть квадрат $\Omega = [0,1]^2$ расположен на плоскости OXY. Разделим квадрат Ω прямыми, параллельными осям, на 9 равных квадратов и отбросим центральный квадрат. Полученное множество обозначим через Ω_1, оно состоит из 8 квадратов Δ_{i_1}, $i_1 = 1\ldots8$. Повторяя эту операцию с каждым из оставшихся квадратов, получим новое множество Ω_2, состоящее из 64 квадратов Δ_{i_1,i_2}, $i_1,i_2 = 1...8$. Повторяем этот процесс до бесконечности, последовательно строя множества $\Omega_3, \Omega_4,..., \Omega_n,...$ Предельное множество Ω, являющееся пересечением множеств Ω_n, $n=0,1,...$ называется «ковром» Серпинского (на рисунке 3.2 показан предфрактал ковра Серпинского 4-го порядка).

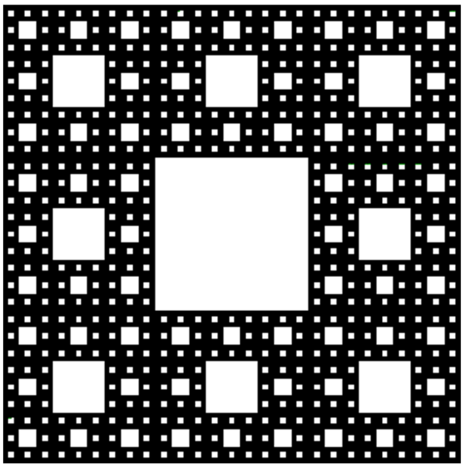


Рисунок 3.2 – Предфрактал Серпинского 4-го порядка

Построим коллокационные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах n-го порядка. Квадраты, входящие в предфрактал Серпинского n-го порядка, обозначим через Δ_i, $i = 1,2,...,8^n$. Порядок их нумерации в дальнейшем не имеет значения.

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\int\limits_{\Omega_n}\frac{x(\tau_1,\tau_2)}{\left((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2\right)^{p/2}}d\tau_1 d\tau_2=f(t),$$

$$t=(t_1,t_2)\in\Omega_n, \tag{3.8}$$

где $p=2,3,...,$ $\Omega_n=\sum\limits_{i=1}^{8^n}\Delta_i$ – n-й предфрактал «ковра» Серпинского; $\Delta_i=\left[\overline{t_i^1},\overline{t_{i+1}^1}\right]\times\left[\overline{t_i^2},\overline{t_{i+1}^2}\right]$.

Приближенное решение уравнения (3.8) будем искать в виде кусочно-постоянной функции:

$$x_n(t_1,t_2)=\sum_{i_n=1}^{8^n}\alpha_i\psi_i(t_1,t_2),\ (t_1,t_2)\in\Omega_n, \tag{3.9}$$

с базисными функциями

$$\psi_i(t_1,t_2)=\begin{cases}1, & (t_1,t_2)\in\Delta_i,\\ 0, & (t_1,t_2)\in[0,1]^2\setminus\Delta_i,\end{cases}\quad i=1,\ldots,8^n.$$

В каждом квадрате Δ_i возьмем узел коллокации $\overline{t_i}=\left(t_i^1,t_i^2\right)$. В частности, можно в качестве $\overline{t_i}$ взять центр квадрата Δ_i, $i=1,\ldots,8^n$.

В результате приходим к системе уравнений

$$a\left(\overline{t_i}\right)\alpha_i+b\left(\overline{t_i}\right)\sum_{j=1}^{8^n}\alpha_j\iint\limits_{\Delta_{ij}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-t_i^1\right)^2+\left(\tau_2-t_i^2\right)^2\right)^{p/2}}=f\left(\overline{t_i}\right),\ i=1,\ldots,8^n. \tag{3.10}$$

Для определенности положим $p=3$. Гиперсингулярные интегральные уравнения при $p=3$ находят наибольшее применение в прикладных задачах.

Известно [65], что интегралы, фигурирующие в (3.10), вычисляются в аналитическом виде

$$\int_a^b\int_c^d \frac{dxdy}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right)^{3/2}}=\frac{\sqrt{\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2}}{\left(x_0-a\right)\left(y_0-b\right)}- \tag{3.11}$$

$$-\frac{\sqrt{\left(x_0-b\right)^2+\left(y_0-d\right)^2}}{\left(x_0-b\right)\left(y_0-d\right)}+\frac{\sqrt{\left(x_0-b\right)^2+\left(y_0-c\right)^2}}{\left(x_0-b\right)\left(y_0-c\right)}-\frac{\sqrt{\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-c\right)^2}}{\left(x_0-a\right)\left(y_0-c\right)}.$$

Применив формулу (3.11) к системе уравнений (3.10), приходим к следующей системе уравнений:

$$a\left(\overline{t_i}\right)\alpha_i+b\left(\overline{t_i}\right)\sum_{j=1}^{8^n}\alpha_j\left(\frac{\sqrt{\left(t_i^1-\overline{t_i^1}\right)^2+\left(t_i^2-\overline{t_{i+1}^1}\right)^2}}{\left(t_i^1-\overline{t_i^1}\right)\left(t_i^2-\overline{t_{i+1}^1}\right)}-\frac{\sqrt{\left(t_i^1-\overline{t_{i+1}^1}\right)^2+\left(t_i^2-\overline{t_{i+1}^2}\right)^2}}{\left(t_i^1-\overline{t_{i+1}^1}\right)\left(t_i^2-\overline{t_{i+1}^2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\left(t_i^1-\overline{t_{i+1}^1}\right)^2+\left(t_i^2-\overline{t_i^2}\right)^2}}{\left(t_i^1-\overline{t_{i+1}^1}\right)\left(t_i^2-\overline{t_i^2}\right)}-\frac{\sqrt{\left(t_i^1-\overline{t_i^1}\right)^2+\left(t_i^2-\overline{t_i^2}\right)^2}}{\left(t_i^1-\overline{t_i^1}\right)\left(t_i^2-\overline{t_i^2}\right)}\right)= \tag{3.12}$$

$$=f\left(\overline{t_i}\right),\ i=1,\ldots,8^n.$$

Для обоснования представленного метода воспользуемся теоремой 1.5 (Лозинского). Запишем систему (3.12) в матричном виде $\overline{C}X=\overline{F}.$ Структура матрицы $\overline{C}$ и векторов X и $\overline{F}$ очевидны.

Вычислим логарифмическую норму матрицы $\overline{C}.$ Вначале оценим диагональные элементы.

Очевидно,

$$C_{ii}=a\left(\overline{t_i}\right)+b\left(\overline{t_i}\right)\iint\limits_{\Delta_{ij}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1-t_i^1\right)^2+\left(\tau_2-t_i^1\right)^2\right)^{3/2}}\ .$$

Оценим интеграл

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - t_i^1\right)^2 + \left(\tau_2 - t_i^1\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{3.13}$$

Выполнив несложные преобразования, получим следующее значение этого интеграла:

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - t_i^1\right)^2 + \left(\tau_2 - t_i^1\right)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \iint\limits_{\Delta^*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\tau_1{}^2 + \tau_2{}^2\right)^{3/2}} = -2^{5/2} 3^n = -4\sqrt{2} \cdot 3^n \approx 5{,}66 \cdot 3^n, \tag{3.14}$$

где

$$\Delta^* = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \right]^2.$$

Из формул (3.13) и (3.14) следует, что

$$C_{ii} = a\left(\overline{t_i}\right) - 8\sqrt{2} \cdot 3^n \cdot b\left(\overline{t_i}\right), i = 1, \ldots, 8^n.$$

Оценим сумму модулей внедиагональных элементов. Интеграл по каждой области Δ_{ij} может быть как положительным, так и отрицательным, но в связи с тем, что рассматривается сумма модулей внедиагональных элементов, это никак не повлияет на оценку суммы модулей внедиагональных элементов. Так как из-за топологии области интегрирования получение этой оценки чрезвычайно сложно при больших n, в качестве оценки суммы модулей внедиагональных элементов примем значение модуля интеграла (3.13), вычисленного по квадрату $[0,1]^2$, за вычетом интеграла по центральному квадрату $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^2$ (1-я итерация фрактала Серпинского) и диагонального элемента $C_{ii} = 2^{7/2} 3^n$. Так как сумма модулей внедиагональных элементов представляет собой значение интеграла (3.13) по области $\bigcup \Delta_{ij}$, то предложенная оценка будет больше, чем суммы внедиагональных элементов и, следовательно, если эта оценка окажется меньше модуля диагонального элемента C_{ii}, то и сумма внедиагональных элементом будет меньше модуля диагонального элемента.

Оценим интеграл (3.13) по предложенной области:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - t_i^1\right)^2 + \left(\tau_2 - t_i^1\right)^2\right)^{3/2}}. = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3^{2n}} - \frac{8}{3^n} + 8} - \sqrt{\frac{3}{3^{2n}} - \frac{4}{3^n} + 4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3^n} + \right.$$

$$\left. +2\sqrt{\frac{2}{3^{2n}} - \frac{4}{3^n} + 4} \cdot 3^n - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot 3^n + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot 3^{2n}\right) \cdot \frac{4 \cdot 3^{2n}}{4 \cdot 3^{2n} - 4 \cdot 3^n + 1} \leq$$

$$< \left(\frac{1}{2}\sqrt{8} - \sqrt{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3^n} + 2\sqrt{4} \cdot 3^n - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 3^n\right) \cdot \frac{4 \cdot 3^{2n}}{4 \cdot 3^{2n} - 4 \cdot 3^n + 1} <$$

$$< \left(4 + 2\sqrt{2}\right)3^n \cdot \frac{4 \cdot 3^{2n}}{4 \cdot 3^{2n} - 4 \cdot 3^n + 1} < 6.84 \cdot \frac{3^n}{1 - 3^{-n}} \approx 6.84 \cdot 3^n, \tag{3.15}$$

$$\iint\limits_{\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - t_i^1\right)^2 + \left(\tau_2 - t_i^1\right)^2\right)^{3/2}}. = \frac{1}{\left(\frac{27}{8 \cdot 3^{2n}} - \frac{45}{4 \cdot 3^{2n}} + \frac{12}{3^{2n}} - 4\right)\left(\frac{3}{2 \cdot 3^{2n}} - 1\right)} \times$$

$$\times \frac{27}{4 \cdot 3^{2n}}\left(\sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{36}{3^n} + 20} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{18}{3^n} + 32} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{24}{3^n} + 8} - \right.$$

$$-2 \cdot 3^n \sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{36}{3^n} + 20} + \frac{2}{3} \cdot 3^n \sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{48}{3^n} + 32} + \frac{4}{3} \cdot 3^{2n} \sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{24}{3^n} + 8} +$$

$$\left. + \frac{8}{9} \cdot 3^{2n} \sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{36}{3^n} + 20} + \frac{2}{9} \cdot 3^{2n} \sqrt{\frac{18}{3^{2n}} - \frac{48}{3^n} + 32}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{4 \cdot 3^{2n}}\left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 4 \cdot 3^n \cdot \sqrt{5} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot 3^n + \frac{8\sqrt{2}}{9} \cdot 3^{2n} + \frac{10\sqrt{2}}{9} \cdot 3^{2n}\right) \geq$$

$$\geq \frac{27}{16}\left(\frac{-4\sqrt{5}}{3^n} + \frac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 3^n} + \frac{8\sqrt{2}}{9} + \frac{10\sqrt{2}}{9}\right) \geq \frac{27}{16} \cdot \frac{18\sqrt{2}}{9} = \frac{27\sqrt{2}}{8} \approx 4{,}77.$$

Тогда сумму модулей внедиагональных элементов можно оценить следующим значением:

$$\iint\limits_{[0,1]^2\setminus[1/3,2/3]^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left(\left(\tau_1 - t_i^1\right)^2 + \left(\tau_2 - t_i^1\right)^2\right)^{3/2}} \le$$

$$\le 6{,}84\cdot 3^n - 5{,}66\cdot 3^n - 4{,}77 \approx 1{,}14\cdot 3^n. \tag{3.16}$$

Из оценок (3.14), (3.15), (3.16) следует, что при достаточно большом значении $n \ge 1$ система уравнений (3.11) однозначно разрешима.

Утверждение 3.3. Пусть выполняются следующие условия: $\left|a(t,\tau)\right|$, $\left|b(t,\tau)\right| \le M$, $M < \infty$, $(t,\tau)\in[0,1]^2$, выполняется неравенство $\left|b(t,\tau)\right| \ge \alpha > 0$ при $(t,\tau)\in[0,1]^2$. Тогда система уравнений (3.11) однозначно разрешима при $n \ge 1$.

Результаты реализации разработанного алгоритма решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах «пыль» Кантора и «ковер» Серпинского представлены в главе 4.

3.2. Численные алгоритмы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси

Линейные уравнения на числовой оси

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

$$-\infty < t < \infty \tag{3.17}$$

Построим для решения уравнения (3.17) несколько вычислительных схем.

Первая вычислительная схема

Приближенное решения уравнения (3.17) будем искать в виде интерполяционного полинома:

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} f(t_k)\psi_k(t), \tag{3.18}$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы по узлам $t_k = \mathrm{tg}\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n,\ldots,n$,

$$\psi_k(t) = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n} c_l(t)c_l(t_k) + s_l(t)s_l(t_k)\right), \tag{3.19}$$

$$c_l(t) = \cos(2l\,\mathrm{arctg}\,t), s_l(t) = \sin(2l\,\mathrm{arctg}\,t).$$

Функции $c_l(t)$ и $s_l(t)$ являются рациональными функциями от t и обладают следующими важными свойствами [104]:

1) $s_n(t) = -Im\left(\dfrac{1-it}{1+it}\right)^n, c_n(t) = Re\left(\dfrac{1-it}{1+it}\right)^n$;

2) система функций $\{s_n(t), c_n(t)\}, n = 0,1,\ldots,\infty$, является ортогональной с весом $\dfrac{1}{1+t^2}$ на интервале $(-\infty,\infty)$;

3) обозначим через H преобразование Гильберта $(Hf)(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau.$

Справедливы формулы [104]:

$$Hc_n = -s_n, Hs_n = c_n + (-1)^{n+1}. \tag{3.20}$$

Предварительно вычислим интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \text{ и } \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \tag{3.21}$$

Из определения гиперсингулярного интеграла и формулы (3.20) следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)} = \frac{d}{dt}(-s_n) =$$

$$= -\left(\cos(2n \cdot \mathrm{arctg}\,t)\right)2n \cdot \frac{1}{1+t^2} = -2n \cdot \frac{1}{1+t^2}c_n(t).$$

Аналогично:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)}=\frac{d}{dt}c_n(t)=$$

$$=-\left(\sin\left(2n\cdot\operatorname{arctg}t\right)\right)2n\cdot\frac{1}{1+t^2}=-2n\cdot\frac{1}{1+t^2}s_n(t).$$

Применим к уравнению (3.17) метод коллокации по узлам $t_k=\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{2n+1},\ k=-n,...,n.$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$a(\bar{t}_i)\alpha_i+b(\bar{t}_i)\frac{2}{2n+2}\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\sum_{l=1}^{n}2l\cdot\frac{1}{1+\bar{t}_k^{\,2}}\left(c_l(\bar{t}_i)c_l(\bar{t}_k)+s_l(\bar{t}_i)s_l(\bar{t}_k)\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}h(t_i,\tau)x_n(\tau)d\tau=f(t_i),i=-n,...,n. \qquad (3.22)$$

Обозначим через $P_n[f]$ оператор проектирования $P_n[f]=\sum_{k=1}^{n}f(\bar{t}_k)\psi_k(t)$ по узлам $\bar{t}_k,\ k=-n,...,n.$

Запишем систему уравнений (3.22) в операторном виде

$$\bar{K}_n x_n\equiv P_n\left(a(t)x_n(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau\right)=P_n\left(f(t)\right). \qquad (3.23)$$

Для построения вычислительной схемы метода механических квадратур аппроксимируем интегральный оператор $\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau$ следующей квадратурной формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^2}P_n\left(\left(1+\tau^2\right)h(t,\tau)x_n(\tau)\right)d\tau+R_n\left(h(t,\tau)x_n(\tau)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)h\left(t,\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}\right)x_n\left(\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}\right)+R_n\left(h(t,\tau)x_n(\tau)\right). \quad (3.24)$$

Вычислив гиперсингулярные интегралы и воспользовавшись квадратурной формулой (3.24), имеем следующую систему уравнений:

$$a(t_i)\alpha_i+\frac{2}{2n+1}b(t_i)\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{2l}{1+t_k^2}\cos\left(2l\left(\frac{(i-k)\pi}{2n+1}\right)\right)\right)+ \quad (3.25)$$

$$+\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1+t_k^2\right)h\left(t_i,t_j\right)\alpha_k=f\left(t_i\right),\ i=-n,...,n,$$

которая в операторном виде записывается уравнением

$$K_n x_n\equiv P_n\left(a(t)x_n(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\tau^2}P_n\left(\left(1+\tau^2\right)h\left(t,\tau\right)x_n\left(\tau\right)\right)d\tau\right)=P_n\left(f(t)\right).$$

Систему (3.25) можно решать различными методами. В данном случае воспользуемся непрерывным методом решения операторных уравнений. Для этого системе (3.25) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_i(u)}{du}=\lambda_i\left(a(t_i)\alpha_i(u)+\frac{2}{2n+1}b(t_i)\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k(u)\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{2l}{1+t_k^2}\cos\left(2l\left(\frac{(i-k)\pi}{2n+1}\right)\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\left(1+t_k^2\right)h\left(t_i,t_k\right)\alpha_k(u)-f\left(t_i\right)\right),i=-n,...,n, \quad (3.26)$$

где коэффициенты $\lambda_i=\pm1,\ i=1-n,...,n,$ подбираются так, чтобы логарифмическая норма матрицы в правой части системы уравнений (3.26) была отрицательной.

Связь между решением системы уравнений (3.23) и сходимостью системы уравнений (3.26) устанавливается так же, как в случае приведенной ниже второй вычислительной схемы.

Вторая вычислительная схема

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (3.17) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением:

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-A}^{A}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+\int_{-A}^{A}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ -A\le t\le A. \qquad (3.27)$$

Введем узлы $t_k=-A+\frac{A}{n}k,\ k=0,1,...,2n$, и обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k=\left[t_k,t_{k+1}\right),k=0,1,...,2n-2,\ \Delta_{2n-1}=\left[t_{2n-1},t_{2n}\right].$

Приближенное решение уравнения (3.27) будем искать в виде полигона

$$x_N(t)=\sum_{k=0}^{2N}\alpha_k\varphi_k(t), \qquad (3.28)$$

где $\varphi_k(t), k=0,1,\ldots,2N,$ – множество базисных функций, определенных формулами:

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}0, & t_{k-1}\le t\le t_{k-1}+\frac{A}{N^2},\\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t-t_{k-1})-\frac{1}{N-2}, & t_{k-1}+\frac{A}{N^2}\le t\le t_k-\frac{A}{N^2},\\ 1, & t_k-\frac{A}{N^2}\le t\le t_k+\frac{A}{N^2},\\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t-t_{k+1})-\frac{1}{N-2}, & t_k+\frac{A}{N^2}\le t\le t_{k+1}-\frac{A}{N^2},\\ 0, & t_{k+1}-\frac{A}{N^2}\le t\le t_{k+1},\\ 0, & t\in[-A,A]\setminus[t_{k-1},t_{k+1}],\end{cases}$$

$k=1,\ldots,2N-1$.

Для граничных узлов t_k, $k=0$ и $k=2N$, базисные функции определяются формулами:

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}1, & -A\le t\le -A+\dfrac{A}{N^2},\\ -\dfrac{N^2}{A(N-2)}(t-t_1)-\dfrac{1}{N-2}, & -A+\dfrac{A}{N^2}\le t\le t_1-\dfrac{A}{N^2},\\ 0, & t_1-\dfrac{A}{N^2}\le t\le t_1,\\ 0, & [-A,A]\setminus[t_0,t_1];\end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(t)=\begin{cases}0, & -A\le t\le t_{N-1}+\dfrac{A}{N^2}\\ \dfrac{N^2}{A(N-2)}(t-t_{N-1})-\dfrac{1}{N-2}, & t_{N-1}+\dfrac{A}{N^2}\le t\le 1-\dfrac{A}{N^2},\\ 1, & A-\dfrac{A}{N^2}\le t\le A.\end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k+b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l\int_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau-t_k)^2}d\tau+\sum_{l=0}^{2N}\alpha_l h(t_k,t_l)\int_{-A}^{A}\varphi_l(\tau)d\tau=f(t_k), \tag{3.29}$$

$$k=0,1,\dots,2N.$$

Замечание. Ниже регулярные интегралы в уравнении (3.29) опускаются, так как они не влияют на дальнейшие рассуждения.

Следуя работе [93], вычислим гиперсингулярные интегралы, входящие в уравнение (3.29):

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)^2}=-2N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)},\ k=2,\dots,2N-2,$$

$$\int_{-A}^{t_1}\frac{\varphi_0(\tau)d\tau}{(\tau+A)^2}=-N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)},$$

$$\int_{t_{2N-1}}^{A}\frac{\varphi_{2N}(\tau)d\tau}{(\tau-A)^2}=-N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)},$$

$$\int_{-A}^{A}\left[\sum_{l=1}^{2N}\varphi_l(\tau)\right]\frac{d\tau}{(\tau+A)^2}=\frac{N^2}{A(N-2)}\ln(N-1)-\frac{1}{2A},$$

$$\int_{-A}^{A}\left[\sum_{l=0}^{2N-1}\varphi_l(\tau)\right]\frac{d\tau}{(\tau-A)^2}=\frac{N^2}{A(N-2)}\ln(N-1)-\frac{1}{2A},$$

$$\int_{-A}^{A}\left[\sum_{l=0}^{2N}{}'\varphi_l(\tau)\right]\frac{d\tau}{(\tau-t_N)^2}=\frac{2N^2}{A(N-2)}\ln(N-1)-\frac{2}{A}.$$

Здесь $\sum_l'$ означает суммирование по $l \neq N$.

Система (3.29) может быть представлена в следующем виде:

$$a(t_k)\alpha_k-b(t_k)2N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_k+\alpha_0 b(t_k)\int_{t_0}^{t_1}\varphi_0(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2}+$$

$$+b(t_k)\sum_{l=1}^{2N-1}{}'\alpha_l\int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}}\varphi_l(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2}+$$

$$+\alpha_{2N}b(t_k)\int_{t_{2N-1}}^{A}\varphi_{2N}(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2}=f(t_k),\quad k=1,\ldots,2N-1,$$

$$a(t_0)\alpha_0-b(t_0)N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_0+\sum_{l=1}^{2N-1}\alpha_l b(t_0)\int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}}\varphi_l(\tau)\frac{d\tau}{(\tau+A)^2}+$$

$$+\alpha_N b(t_0)\int_{2N-1}^{A}\varphi_{2N}(\tau)\frac{d\tau}{(\tau+A)^2}=f(t_0),$$

$$a(t_{2N})\alpha_{2N}-b(t_{2N})N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_{2N}+\sum_{l=1}^{2N-1}\alpha_l b(t_{2N})\int_{l-1}^{l+1}\varphi_l(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-A)^2}+$$

$$+\alpha_0 b(t_{2N})\int_{-A}^{t_1}\varphi_0(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-A)^2}=f(t_{2N}). \qquad (3.30)$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по $l \neq k$.

Система (3.30) эквивалентна следующей системе:

$$(\operatorname{sgn} b(t_k)\left(a(t_k)\alpha_k - b(t_k)2N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_k + \alpha_0 b(t_k)\int_{t_0}^{t_1}\varphi_0(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2} +\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{2N-1}{}' \alpha_l b(t_k)\int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}}\varphi_l(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2} + \alpha_{2N} b(t_k)\int_{t_{2N-1}}^{A}\varphi_{2N}(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2}\right) =$$

$$= (\operatorname{sgn} b(t_k)) f(t_k), k = 1,\ldots,2N-1,$$

$$(\operatorname{sgn} b(t_0))\left(a(t_0)\alpha_0 - b(t_0)N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_0 + \sum_{l=1}^{2N-1}\alpha_l b(t_0)\int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}}\frac{\varphi_l(\tau)d\tau}{(\tau+A)^2} +\right.$$

$$+\alpha_N b(t_0)\int_{t_{2N-1}}^{A}\varphi_{2N}(\tau)\frac{d\tau}{(\tau+A)^2} = (\operatorname{sgn} b(t_0)) f(t_0),$$

$$(\operatorname{sgn} b(t_{2N}))\left(a(t_{2N})\alpha_{2N} - b(t_{2N})N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_{2N} +\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{2N-1}\alpha_l b(t_{2N})\int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}}\varphi_l(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-A)^2} +$$

$$\left.+\alpha_0 b(t_{2N})\int_{-A}^{t_1}\varphi_0(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-A)^2}\right) = (\operatorname{sgn} b(t_{2N})) f(t_{2N}). \tag{3.31}$$

Для удобства запишем систему (3.31) в матричной форме:

$$DX = F,$$

где $D = \{d_{kl}\}$, $k,l = 0,1,\ldots,2N$, $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{2N})$, $F = (f_0, f_1, \ldots, f_{2N})$. Обозначения $\{d_{kl}\}$, $\{x_k\}$ и $\{f_k\}$ очевидны.

Диагональные элементы левой части системы (3.31) равны

$$d_{kk} = (\operatorname{sgn} b(t_k))\left(a(t_k) - b(t_k)2N^2\frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\right), k = 1,2,\ldots,2N-1,$$

$$d_{00} = \left(\operatorname{sgn} b(t_0)\right)\left(a(t_0) - b(t_0) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right),$$

$$d_{2N,2N} = \left(\operatorname{sgn} b(t_{2N})\right)\left(a(t_{2N}) - b(t_{2N}) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right).$$

Кубическая норма матрицы D оценивается выражением

$$\Lambda_3(D) = \max\left(\max_{1 \le k \le 2N-1} \left(d_{kk} + \sum_{l=1}^{2N-1}{}' | b(t_k) | \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \right.\right.$$

$$\left. + | b(t_k | \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + | b(t_k) | \int_{t_{2N-1}}^{A} \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} \right),$$

$$\left(d_{00} + \sum_{l=1}^{2N-1} | b(t_0) | \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} + | b(t_0) | \int_{t_{2N-1}}^{A} \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} \right),$$

$$\left.\left(d_{2N,2N} + \sum_{l=1}^{2N-1} | b(t_{2N}) | \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} + | b(t_{2N}) | \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} \right)\right).$$

Если $\Lambda_3(D) < 0$, то из утверждения 1.7 следует, что система (3.31) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и $\| D^{-1} \| \le 1 / | \Lambda_3(D) |$.

Очевидно, что $x_N^*(t)$ является также решением системы уравнений (3.31).

Пусть $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ являются решениями уравнений (3.17) и (3.31) соответственно.

Пусть функции $x^*(t), x^{*(1)}(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\max(\sup_{(-\infty < t < \infty)} | x^*(t) |,\quad \sup_{(-\infty < t < \infty)} | x^{*(1)}(t) |,\quad \sup_{(-\infty < t < \infty)} | x^{*(2)}(t) |) \le M$, $0 < M < \infty$, где $M -$ ограниченная константа.

Легко видеть, что

$$a(t_k) x^*(t_k) + b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau = f(t_k),$$

где $k = 0,1,\dots,2N$.

Следовательно,

$$(\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)x^*(t_k) + b(t_k)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau) = (\operatorname{sgn} b(t_k))f(t_k), \qquad (3.32)$$

где $k = 0,1,\dots,2N$.

Пусть $x_N^*(t)$ – решение уравнения (3.31). Вычтем (3.31) из (3.32) и представим результат в следующем виде:

$$(\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)(x^*(t_k) - x_N^*(t_k)) + b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}(x^*(t_l) - x_N^*(t_l))\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau) =$$

$$= (\operatorname{sgn} b(t_k))g(t_k),$$

где

$$g(t_k) = \sum_{l=0}^{2N} b(t_k)x^*(t_l)\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau - b(t_k)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2}d\tau =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{-A}x^*(\tau)\frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} - b(t_k)\sum_{l=0}^{2N}\int\limits_{\Delta_l}\left[x^*(\tau) - x^*(t_l)\varphi_l(\tau)\right]\frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} -$$

$$-b(t_k)\int\limits_{A}^{\infty}x^*(\tau)\frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} = i_1(k) + i_2(k) + i_3(k),$$

$$k = 0,1,\dots,2N.$$

Так как матрица D обратима, то

$$\|\overline{x}^* - \overline{x}_N^*\| \le \|D^{-1}\|\|G\|,$$

где $\overline{x}^* = (x^*(t_0), x^*(t_1), \dots, x^*(t_{2N})), \overline{x}_N^* = (x_N^*(t_0), x_N^*(t_1), \dots, x_N^*(t_{2N}))$. Структура вектора G очевидна.

Оценим нормы векторов $I_j = (i_j(0), i_j(1), \dots, i_j(2N)), j = 1,2,3.$

Следуя [93], проведем оценку нормы $\|I_2\|$:

$$\| I_2 \| \leq b\left(t_k\right)\sum_{l=0}^{2N}\frac{N^2}{\left(k-l-1\right)^2}\int_{\Delta_l}\left[x^*(\tau)-x^*(t_l)\varphi_l(\tau)\right]\frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2}\leq\frac{C}{N}.$$

Норма $\| I_1 \|$ оценивается аналогично.

Из условий, наложенных на функцию $x^*(t)$, следует, что $\| I_1 \| + \| I_2 \| \leq C/A$.

Таким образом, при $N\to\infty$ и при $A\to\infty$ справедлива оценка $\| x^* - x_N^* \| \to 0$.

Третья вычислительная схема

Введем сетку узлов

$$t_k = -A + \frac{kA}{N}, k = 0,1,\dots,2N,$$

где A – достаточно большое положительное число.

Пусть: $\Delta_{-1}=(-\infty,t_0)$, $\Delta_k=[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,\dots,2N-1$, $\Delta_{2N}=[t_{2N},\infty)$.

Введем дополнительную сетку узлов $t'_{-1}=-A-A/2N$, $t'_k=t_k+A/2N$, $k=0,1,\dots,2N-1$, $t'_{2N}=A+A/2N$.

Приближенное решение уравнения (3.17) запишем в виде кусочно-постоянной функции:

$$x_N(t)=\sum_{k=-1}^{2N}\alpha_k\psi_k(t),$$

$$\psi_k(t)=\begin{cases}1, & t\in\Delta_k,\\ 0, & t\in(-\infty,\infty)\setminus\Delta_k,\end{cases}\quad k=-1,0,1,\dots,2N,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы

$$a(t'_l)\alpha_l + b(t'_l)\sum_{k=-1}^{2N}\alpha_k\int_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-t'_l)^p}=f(t'_l),\ l=-1,0,1,\dots,2N. \tag{3.33}$$

Для доказательства разрешимости этого уравнения воспользуемся теоремой Адамара об обратимости матриц.

Вычислим интегралы в левой части системы уравнений (3.33):

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p},\ k, l = -1, 0, 1, \ldots, 2N.$$

Используя определения гиперсингулярных интегралов [12], получим следующие значения:

$$\int\limits_{\Delta_{-1}} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{-1})^p} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1};$$

$$\int\limits_{\Delta_{2N}} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{2N})^p} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1};$$

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_k)^p} = -\frac{2}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1},\ k = 0, 1, ..., 2N-1;$$

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{-1})^p} = \frac{1}{p-1}\left(\left(\frac{2N}{(2k+1)A}\right)^{p-1} - \left(\frac{2N}{(2k+3)A}\right)^{p-1}\right),\ k = 0, 1, ..., 2N-1;$$

$$\int\limits_{A}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{-1})^p} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{4NA + A}\right)^{p-1};$$

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{2N})^p} = \frac{1}{p-1}\left(\left(\frac{2N}{4AN - (2k-1)A}\right)^{p-1} - \left(\frac{2N}{4AN - (2k+1)A}\right)^{p-1}\right),$$

$$k = 0, 1, ..., 2N-1;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{2N})^p} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{4AN + A}\right)^{p-1};$$

$$\int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p} = \frac{1}{p-1}\left(\left(\frac{2N}{(2k-2l-1)A}\right)^{p-1} - \left(\frac{2N}{(2k-2l+1)A}\right)^{p-1}\right),$$

$$k, l = 0, 1, ..., N-1, k \neq l;$$

$$\int\limits_{\Delta_{-1}} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{(2l+1)A}\right)^{p-1},\ l \neq -1,$$

$$\int\limits_{\Delta_{2N}} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{2N}{A(4N-2l-1)}\right)^{p-1}, l \neq 2N.$$

Из приведенных оценок можно заключить, что

$$\sum_{l=-1}^{k-1}\left|\int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t'_k)^p}\right| = \left|\int_{-\infty}^{t_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_k)^p}\right|;$$

$$\sum_{l=k+1}^{2N}\left|\int\limits_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau - t'_k)^p}\right| = \left|\int_{t_{k+1}}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - t'_k)^p}\right|.$$

Для удобства перепишем систему уравнений (3.33) в матричной форме. Получим следующее матричное уравнение:

$$AX = F,$$

в котором $A = \{a_{kl}\}$, $k, l = -1, 0, 1, \ldots, 2N$, $X = (\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2N})$, $F = \left(f(t'_{-1}), f(t'_0), f(t'_1), \ldots, f(t'_{2N})\right)^T$.

Здесь

$$a_{ll} = a(t'_l) - \frac{2b(t'_l)}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1}, l = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1, \tag{3.34}$$

$$a_{-1,-1} = a(t'_{-1}) - \frac{b(t'_{-1})}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1}, \tag{3.35}$$

$$a_{2N,2N} = a(t'_{2N,2N}) - \frac{b(t'_{2N,2N})}{p-1}\left(\frac{2N}{A}\right)^{p-1}, \tag{3.36}$$

$$a_{lk} = b(t'_l) \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p}$$

при $k \neq l$, $k, l = -1, 0, 1, \ldots, 2N$.

Проверим условия теоремы Адамара.

Очевидно,

$$\sum_{k=0}^{2N} |a_{-1,k}| = \left| b(t'_{-1}) \int_{-A}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{-1})^p} \right| = \frac{|b(t'_{-l})|}{p-1} \left(\frac{2N}{A} \right)^{p-1}, \tag{3.37}$$

$$\sum_{k=-1}^{2N-1}{}' |a_{2N,k}| = |b(t'_{2N})| \left| \int_{-\infty}^{A} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{2N})^p} \right| = \frac{|b(t'_{2N})|}{p-1} \left(\frac{2N}{A} \right)^{p-1}, \tag{3.38}$$

$$\sum_{k=-1}^{2N} \left| a_{l,k} \right| = \sum_{k=-1}^{l-1} \left| a_{l,k} \right| + \sum_{k=l+1}^{2N} \left| a_{l,k} \right| = |b(t'_{2N})| \left| \int_{-\infty}^{t_l} \frac{d\tau}{(\tau - t'_{2N})^p} \right| + \tag{3.39}$$

$$+ |b(t'_l)| \left| \int_{t_{l+1}}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p} \right| = \frac{2|b(t'_l)|}{p-1} \left(\frac{2N}{A} \right)^{p-1}, \ l = 0,1,...,2N-1.$$

Здесь через $\sum\limits_{k=-1}^{2N}{}' \left| a_{l,k} \right|$ обозначена сумма всех элементов кроме $a_{l,l}$.

Из формул (3.34)–(3.39), следует, что если функции $a(t) \cdot b(t) < 0$ и $b(t) \neq 0$ при $-\infty < t < \infty$, то система уравнений (3.33) однозначно разрешима.

Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 3.4. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $b(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty, \infty)$;

2) функции $a(t)$ и $b(t)$ принимают значения различных знаков при всех значениях $t,\ t \in (-\infty, \infty)$.

Тогда система уравнений (3.19) однозначно разрешима.

Результаты реализации разработанного алгоритма решения гиперсингулярных интегральных уравнений на бесконечной числовой прямой представлены в главе 4.

Нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения

Рассмотрим нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения следующего вида:

$$a(t, x(t)) + b(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t),\ p = 2, 4, ... \qquad (3.40)$$

Пусть $x^*(t)$ – изолированное решение уравнения (3.40) и $\sup\limits_{-\infty < t < \infty} | x^*(t) | \le h.$

Пусть функция $a(t,u) \in W^{1,1}(\Omega)$, $\Omega = (-\infty, \infty; -2h, 2h)$, и имеет место неравенство $\sup\limits_{-\infty < t < \infty,} \left| \frac{\partial a(t,u)}{\partial u} \right| \le \gamma.$

Подобные уравнения возникают в многих областях физики и техники. Одной из таких областей является теория дислокации. В задачах дислокации и теории волн на водной поверхности важную роль играют уравнения Пейерлса – Набарро и Бенжамина – Оно, являющееся нелинейным гиперсингулярным интегральным уравнением вида (3.40):

– уравнение Пейерлса – Набарро:

$$\frac{1}{1 - v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + \sin \frac{2\pi x(t)}{b} = 0;$$

– уравнение Бенжамина – Оно:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau + x(t) - x^2(t) = 0.$$

При описании вычислительной схемы решения уравнения (3.40) используется обозначения, введенные в разд. 3.1.

Приближенное решение уравнения (3.40) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=-1}^{2N} \alpha_k \psi_k(t),$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы нелинейных уравнений

$$a(t'_l, \alpha_l) + b(t'_l) \sum_{k=-1}^{2N} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t'_l)^p} = f(t'_l),\ l = -1, 0, 1, \ldots, 2N. \qquad (3.41)$$

Введем пространство R_{2N+2} векторов $x=(x_{-1},x_0,x_1,\ldots,x_{2N})$, с нормой $\|x\|=\max\limits_{-1\le k\le 2N}|x_k|$. Для доказательства разрешимости системы (3.41) воспользуемся методом Ньютона – Канторовича.

Напомним метод Ньютона – Канторовича. Пусть Z и Y – банаховы пространства.

Рассмотрим уравнение

$$Kz=0, \tag{3.42}$$

где K – нелинейный оператор, действующий из пространства Z в пространство Y.

Пусть существует производная Фреше $K'(z)$ в окрестности точки z_0, и в начальном приближении z_0 существует линейный обратный оператор $[K'(z_0)]^{-1}$.

Итерационные процессы Ньютона – Канторовича имеют вид:

– основной:

$$z_{n+1}=z_n-[K'(z_n)]^{-1}K(z_n); \tag{3.43}$$

– модифицированный:

$$z_{n+1}=z_n-[K'(z_0)]^{-1}K(z_n). \tag{3.44}$$

Методу Ньютона – Канторовича посвящено большое число работ [46, 48]. Приведем утверждения о сходимости итерационных процессов Ньютона – Канторовича, удобные при решении практических задач [13].

Утверждение 3.5 [13]. Пусть Z и Y – банаховы пространства. Пусть для них выполняются условия:

1) $\|K(z_0)\|\equiv\eta_0$;

2) оператор K имеет производную Гато в окрестностях точки z_0, а также существует правый обратный оператор $[K'(z_0)]_r^{-1}$, норма которого

$$\left\|[K'(z_0)]_r^{-1}\right\|=B_0;$$

3) в сфере $S\{z:\|z-z_0\|\le B_0\eta_0/(1-q)\}$ $(q<1)$ справедливо неравенство

$$\|K'(z_1)-K'(z_2)\|\le q/(B_0(1+q)).$$

Тогда уравнение (3.42) имеет в области S решение x^*, к которому сходится итерационный процесс (3.43) и справедлива оценка $\|z^*-z_n\|\le q^n\eta_0 B_0/(1-q).$

Утверждение 3.6 [13]. Пусть для банаховых пространств Z и Y выполняются следующие условия:

1) $\|K(z_0)\|\equiv\eta_0$;

2) оператор K имеет производную Гато в окрестностях точки x_0, а также существует правый обратный оператор $[K'(z_0)]_r^{-1}$, норма которого

$$\|[K'(z_0)]_r^{-1}\|=B_0;$$

3) в сфере $S\{z:\|z-z_0\|\le B_0\eta_0/(1-q)\}$ $(q<1)$ выполняется следующее неравенство:

$$\|K'(z_1)-K'(z_2)\|\le q/(B_0).$$

Тогда итерационный процесс (3.44) сходится к решению уравнения (3.42) $x^*\in S$ и справедлива оценка $\|z^*-z_n\|\le q^n\eta_0 B_0/(1-q).$

Систему уравнений (3.41) удобно представить в операторной форме:

$$K_N X_N=F_N, \tag{3.45}$$

где $X_N=\{\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{2N}\}$, $F_N=\{f(t'_{-1}),f(t'_0),...,f(t'_{2N})\}.$

Производная оператора K_N на элементе $x^0=(\alpha^0_{-1},\alpha^0_0,\alpha^0_1,\ldots,\alpha^0_{2N})$ принимает следующий вид:

$$K'_N\left(x^0\right)X_N=H_N X_N,$$

где $H=\{h_{lk}\}$, $l,k=-1,0,1,\ldots,2N,$

$$h_{ll}=a'_2(t'_l,\alpha^0_l)+b(t'_l)\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-t'_l)^p},\ l=-1,0,1,\ldots,2N,$$

$$h_{lk} = b(t_l') \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t_l')^p}, \; l,k = -1,0,1,\ldots,2N, \; l \neq k,$$

где через $a_2'(t,u)$ обозначается производная функции $a(t,u)$ по второй переменной.

Уравнение (3.45) будем решать модифицированным методом Ньютона – Канторовича.

$$X_{m+1} = X_m - [K'(X^0)]^{-1}(KX_m - F), \; m = 0,1,\ldots.$$

Проверим выполнение условий утверждения 3.6.

Если $\sup\limits_{-\infty<t<\infty, 2h\le u\le 2h} |a_2'(t,u)| \le \gamma$, то выполняется условие 1 утверждения 3.6. Пусть $X_0 = \left(\alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{2N}^0\right)$ – начальное приближение, тогда

$$\max_{-1\le l\le 2N} \left| a(t_l', \alpha_l^0) + b(t_l') \sum_{k=-1}^{2N} \alpha_k^0 \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t_l')^p} - f(t_l') \right| =$$

$$\max_{-1\le l\le 2N} \left| a(t_l', \alpha_l^0) - a(t_l', \alpha_l^*) + b(t_l) \sum_{k=-1}^{2N} (\alpha_k^0 - \alpha_k^*) \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t_l')^p} \right| \le$$

$$\le \left(\gamma + \max_{-1\le l\le 2N} |b(t_l')| \frac{2}{p-1} \left(\frac{2N}{A} \right)^{p-1} \right) \max_{-1\le l\le 2N} |\alpha_l^0 - \alpha_l^*|,$$

где $\alpha_l^*, l = -1,0,1,...,2N,$ – решение уравнения (3.41).

Отсюда следует, что при любом η_0 существует такой вектор $(\alpha_{-1}^0, \alpha_0^0, ..., \alpha_{2N}^0),$ что $\| KX_0 \| = \eta.$

Обратимость оператора $K'\left(x_0\right)$ следует из утверждений предыдущего раздела.

Таким образом, выполнено условие 2 утверждения 3.6.

Нетрудно видеть, что если

$$\sup_{-\infty<t<\infty, -2h\le u\le 2h} |a_2'(t,u)| \le \gamma,$$

то

$$\left\|K'(X_1)-K'(X_2)\right\| = \max_{-1\le l\le 2N} |\, a_2'(t_l',\alpha_l^1) - a_2'(t_l',\alpha_l^2)\,| \le \gamma \left\|X_1 - X_2\right\|,$$

где $X_i = (\alpha_{-1}^i, \alpha_0^i, \alpha_1^i, \ldots, \alpha_{2N}^i),\ i = 1,2.$

Следовательно, справедливо условие 3.

Таким образом, при достаточно хорошем начальном приближении выполнены условия утверждения 3.6 и, следовательно, доказана сходимость итерационного процесса (3.44) к решению X^* уравнения (3.41) с оценкой $\left\|X^* - X_n\right\| \le cq^n,$ где $c = \text{const}.$

Помимо метода Ньютона – Канторовича, опишем применение метода решения непрерывных операторных уравнений. Согласно этому методу системе (3.41) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_l(\sigma)}{d\sigma} = v_j \left[\frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} a(t_l', \alpha_k(\sigma)) + b(t_l') \sum_{k=-1}^{2N} \alpha_k(\sigma) \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - t_l')^p} - f(t_l') \right], \tag{3.46}$$

$$a_l(0) = 0, \quad l = 1, \ldots, 2N-2. \tag{3.47}$$

Константы $v_j = \pm 1,\ j = 0,1,\ldots,2N-1,$ в уравнении (3.46) определяются так, чтобы логарифмическая норма матрицы правой части системы уравнений (3.46) была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

В случае, если логарифмическая норма отрицательна в некотором банаховом пространстве, решение системы дифференциальных уравнений (3.46)–(3.47) сходится к решению X^* уравнения (3.41) при $\sigma \to 0$.

Результаты реализации разработанного алгоритма решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на бесконечной числовой прямой представлены в главе 4.

Основные результаты и выводы по главе 3

Предложены и обоснованы численные алгоритмы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах: совершенное множество Кантора и «ковер» Серпинского, являющиеся одномерным и двумерным многообразием соответственно. Предложены и обоснованы численные алгоритмы решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси.

Результаты главы 3 представлены в работах [4, 16, 17, 19–21, 23, 24, 26–28].

ГЛАВА 4
КОМПЛЕКС ПРОГРАММ
И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

4.1. Программный комплекс для приближенного решения задачи синтеза антенн с фрактальной топологией

Был разработан программный комплекс для реализации вычислительных алгоритмов, предложенных в главе 2 для моделирования антенн интегральными уравнениями Фредгольма первого рода,

Описание программы. Общие сведения о программе

Наименование программы aperture_antenna. Основные функции программы описаны в модуле Исходный код.cpp.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение: операционная система Windows 10; интерпретатор языка С++; библиотеки: cmath.h, fstream.h, iostream.h, SFML.

Для нормальной работы программы необходим 1 Гб оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 12 Кб. Программа написана на высокоуровневом языке программирования С++.

Функциональное назначение

Программа предназначена для решения задачи синтеза антенны с заданными параметрами.

Загрузка программы

Загрузка программы осуществляется при помощи запуска оконного приложения.

После запуска стартовой формы приложения (рисунок 4.1) происходит выбор типа раскрыва: одномерный или двумерный, ввод используемого для расчета антенны количества узлов и длины антенны. Затем после нажатия на кнопку «Начать расчет» начинается процесс решения задачи синтеза антенны, по окончании которого открывается вторая форма, на которую выводятся полученные результаты.

На второй форме представлены полученные результаты, а также, по нажатию кнопки «Сохранить», происходит сохранение результатов в текстовый файл.

Эксплуатация программы

Входными данными для программы, реализующей формулы (2.57)–(2.59), являются: число узлов N, длина антенны l, которые вводятся с клавиатуры на формах, а именно:

– количество узлов;

– длина антенны;

– ограничение максимального количества итераций метода решения непрерывных операторных уравнений.

На рисунках 4.1 и 4.2 представлены окна программы, а на рисунке 4.3 показана схема реализованного программного комплекса.

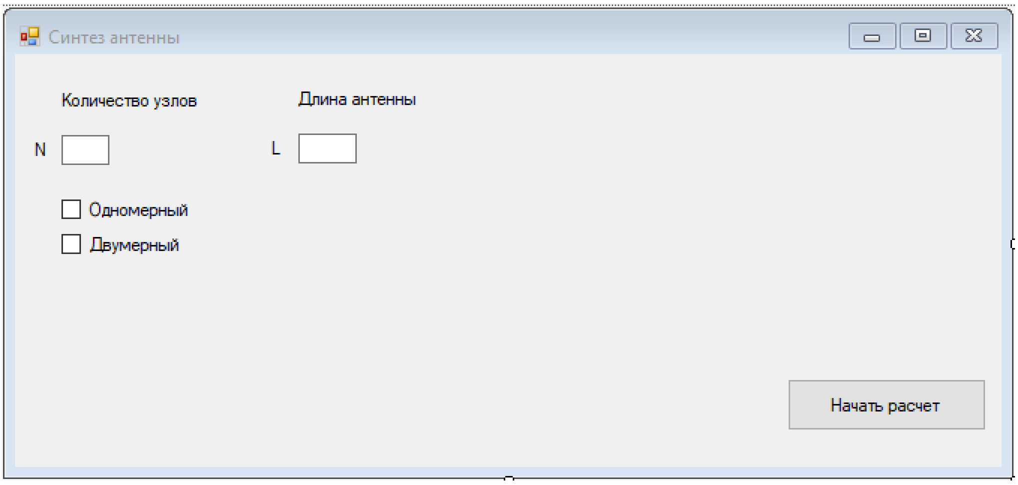


Рисунок 4.1 – Ввод количества узлов и длины антенны

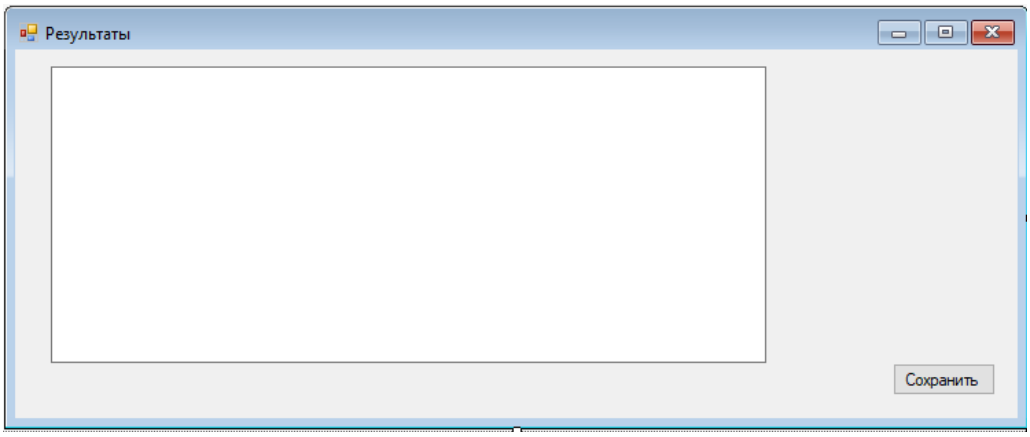


Рисунок 4.2 – Окно вывода полученных результатов

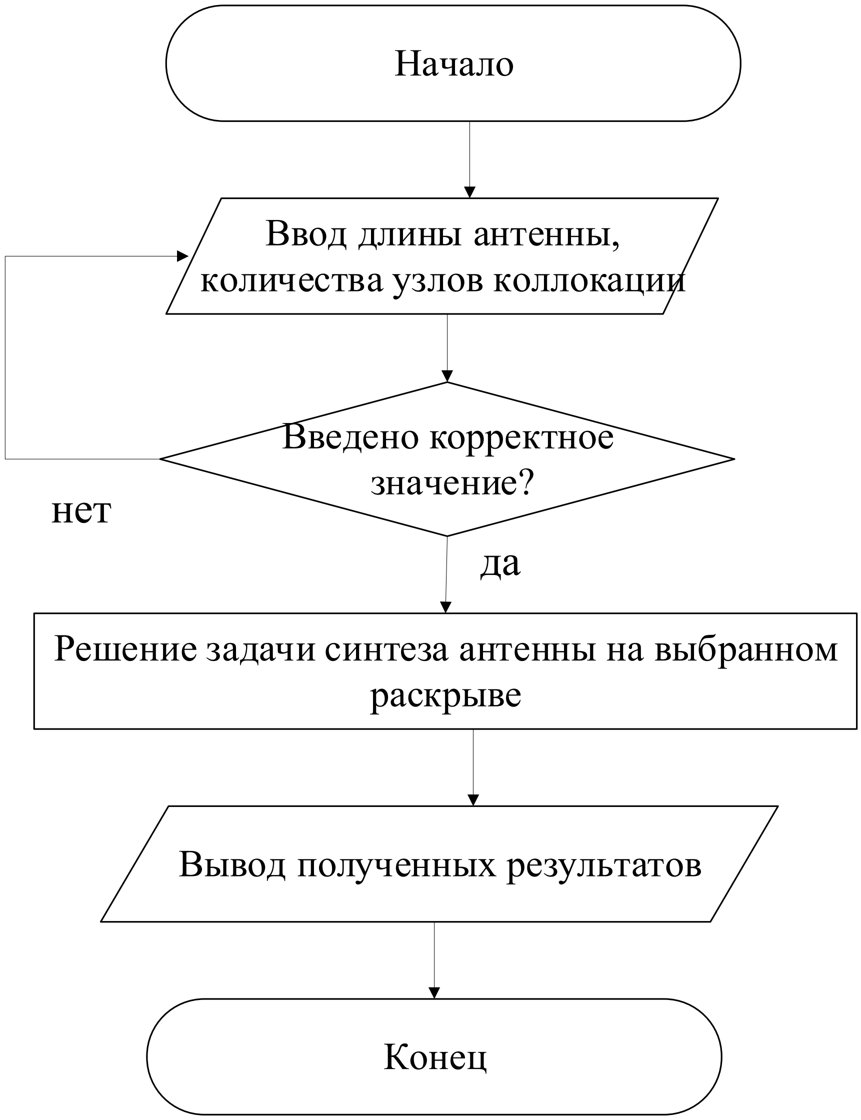


Рисунок 4.3 – Схема выполнения первой программы

4.2. Программа для численного синтеза антенны с заданной диаграммой направленности

Описание программы. Общие сведения о программе

Наименование программы numerical_synthesis. Основные функции программы описаны в модуле Исходный код.cpp.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение: операционная система Windows 10; интерпретатор языка C++; библиотеки: cmath.h, fstream.h, iostream.h, SFML.

Для нормальной работы программы необходим 1 Гб оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 11 Кб. Программа написана на высокоуровневом языке программирования C++.

Функциональное назначение

Программа предназначена для решения задачи синтеза антенны с заданной диаграммой направленности.

Загрузка программы

Загрузка программы осуществляется при помощи запуска консольного приложения.

Эксплуатация программы

Входными данными для программы является число узлов для сетки по координатам x и y.

Выходными данными являются:

– координата x_j, $j = \overline{1, N}$, точки;

– координата y_j, $j = \overline{1, N}$, точки;

– полученное приближенное значение искомой функции $g(\eta)$ в этой точке;

– точное значение искомой функции $g(\eta)$ в этой точке;

– значение погрешности полученного приближенного значения искомой функции $g(\eta)$ в этой точке.

На рисунке 4.4 показана схема выполнения второй программы.

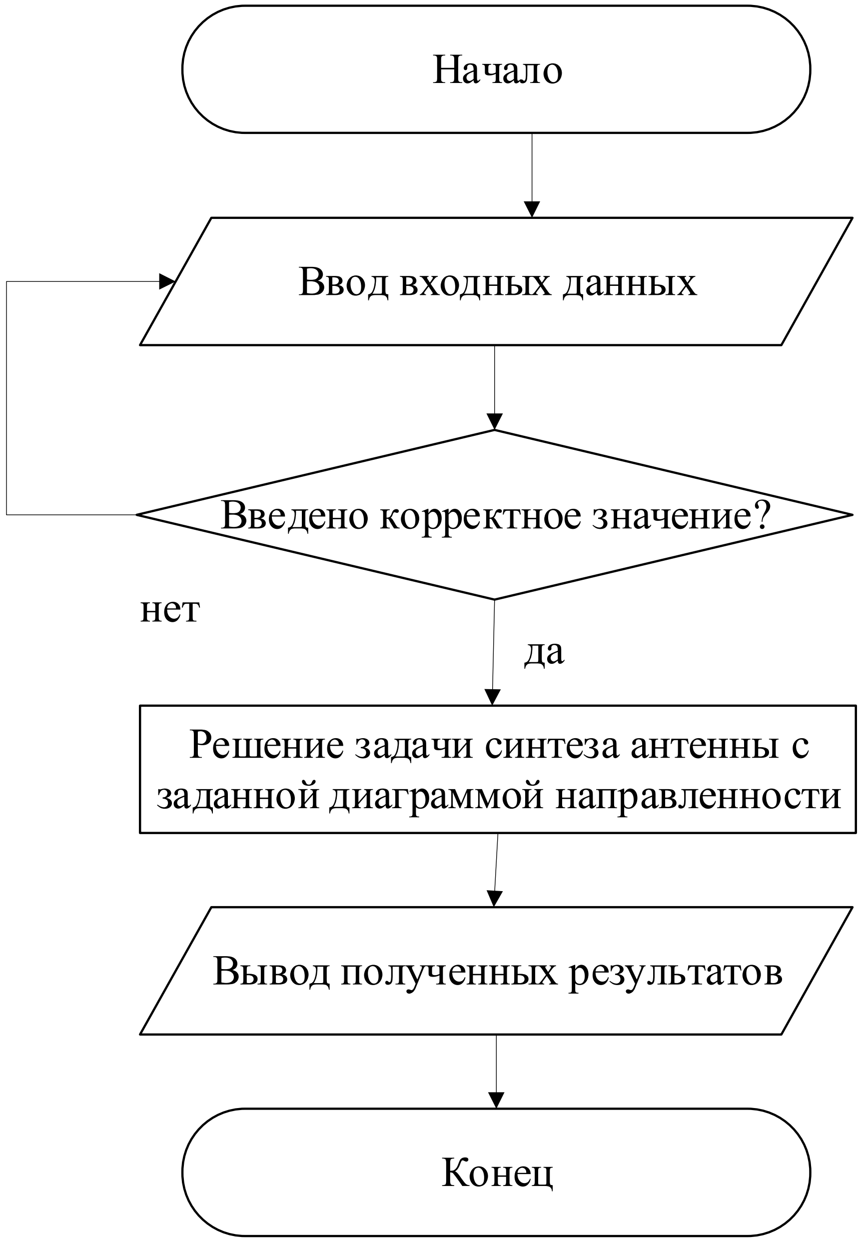


Рисунок 4.4 – Схема выполнения второй программы

4.3. Программы для приближенного решения уравнений Поклингтона и Галлена

Описание программы. Общие сведения о программе

Наименование программы Pocklington_Gallen. Основные функции программы описаны в модуле Исходный код.cpp.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение: операционная система Windows 10; интерпретатор языка C++; библиотеки: cmath.h, fstream.h, iostream.h, SFML.

Для нормальной работы программы необходим 1 Гб оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 9 Кб. Программа написана на высокоуровневом языке программирования C++.

Функциональное назначение

Программа предназначена для решения уравнений Поклингтона и Галлена.

Загрузка программы

Загрузка программы осуществляется при помощи запуска консольного приложения.

Эксплуатация программы

Входными данными для программы является количество используемых узлов N для построения сетки.

Выходными данными являются коэффициенты $\alpha_j,\ j=1,N$, характеризующие кусочно-постоянную функцию решения уравнения Поклингтона или Галлена.

На рисунке 4.5 показана схема выполнения программы решения уравнений Поклингтона и Галлена

Рисунок 4.5 – Схема выполнения программы решения уравнений Поклингтона и Галлена

4.4. Программа для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений на исследуемых многообразиях

Описание программы. Общие сведения о программе

Наименование программы hypersingular_equation. Основные функции программы описаны в модуле Исходный код.cpp.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение: операционная система Windows 10; интерпретатор языка С++; библиотеки: cmath.h, fstream.h, iostream.h, SFML.

Для нормальной работы программы необходим 1 Гб оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 29 Кб. Программа написана на высокоуровневом языке программирования С++.

Функциональное назначение

Программа предназначена для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на следующих многообразиях: предфракталы Кантора, Серпинского, и на числовой оси

Загрузка программы

Загрузка программы осуществляется при помощи запуска консольного приложения.

Эксплуатация программы

Входными данными для программы являются:

– вид многообразия, на котором решается уравнение;

– для фрактальной области – количество итераций соответствующего предфрактала;

– для числовой прямой – параметр A и количество используемых узлов.

Выходными данными для «ковра» Серпинского являются:

– координата t_j, $j = 1, N$, точки;

– координата τ_j, $j = 1, N$, точки;

– полученное приближенное значение искомой функции $x(t,\tau)$ в этой точке;

– точное значение искомой функции $x(t,\tau)$ в этой точке;

– значение погрешности полученного приближенного значения искомой функции $x(t,\tau)$ в этой точке.

Выходными данными для предфрактала Кантора и числовой оси являются:

– координата t_j, $j = 1, N$, точки;

– полученное приближенное значение искомой функции $x(t)$ в этой точке;

– точное значение искомой функции $x(t)$ в этой точке;

– значение погрешности полученного приближенного значения искомой функции $x(t)$ в этой точке.

На рисунке 4.6 показана схема выполнения четвертой программы

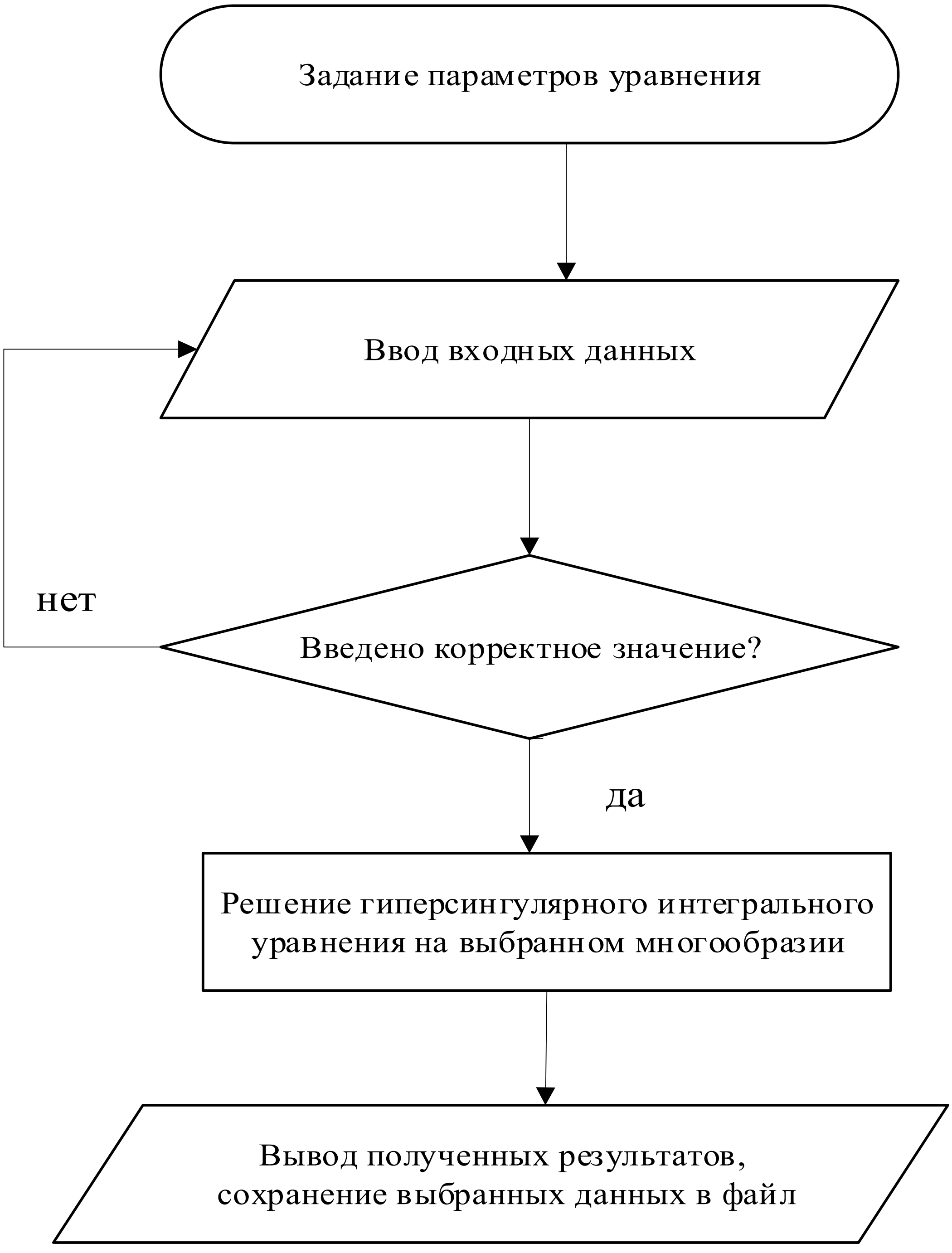


Рисунок 4.6 – Схема выполнения четвертой программы

4.5. Результаты применения разработанных программных комплексов для решения модельных задач

Синтез диаграммы направленности антенны с топологией «пыли» Кантора

Проиллюстрируем эффективность предложенных выше вычислительных схем и программ на нескольких модельных примерах синтеза антенн.

Пусть

$$f(t)=\frac{2{,}19479\sin(20(t-0{,}5))}{20(t-0{,}5)}+0{,}65844\ -$$

проекция диаграммы направленности антенны на плоскость, продемонстрированная на рисунке 4.7.

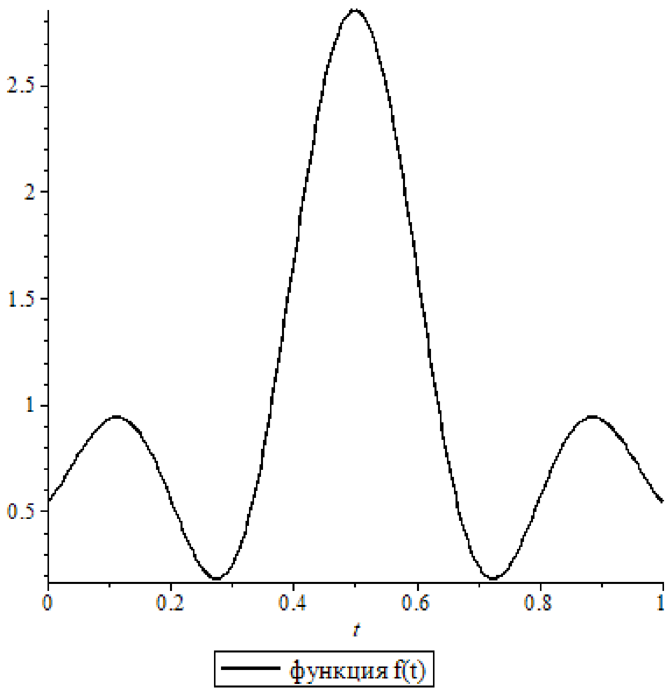


Рисунок 4.7 – График функции $f(t)$ в правой части формулы

Задачи синтеза антенны с заданной диаграммой направленности приводят к решению уравнения

$$\int\limits_{C_n} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\, t\in[0,1].$$

В качестве ядра $h(t,\tau)$ возьмем функцию

$$h(t,\tau)=10\cos(10\tau(\cos 3t)).$$

Точное решение имеет вид $x(t)=t$, где $t\in C_n$, C_n – n-й предфрактал совершенного множества Кантора. Ниже используется предфрактал 5-го порядка.

Требуется найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую условию (2.56).

По полученному приближенному решению $x(t)$ была восстановлена функция $f(t)$ (правая часть уравнения). Результаты восстановления и сравнения с исходной функцией $f(t)$ приведены на рисунке 4.8.

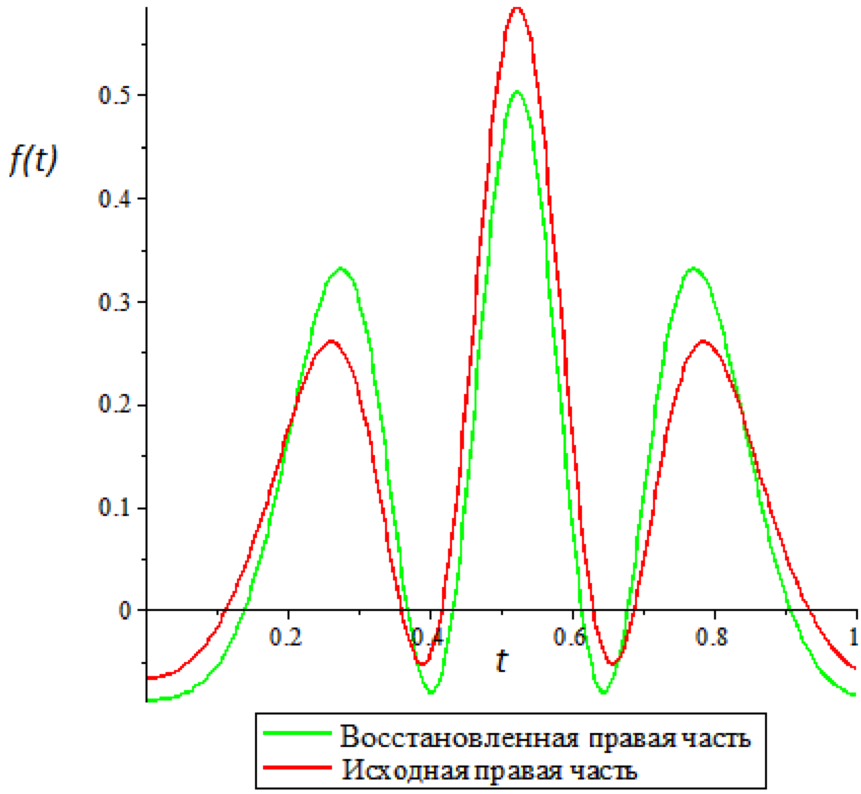


Рисунок 4.8 – Сравнение исходной и восстановленной правой части уравнения

На рисунке 4.9 показано сравнение точного решения $x(t)$ поставленной модельной задачи и полученного приближенного решения $x_n(t)$.

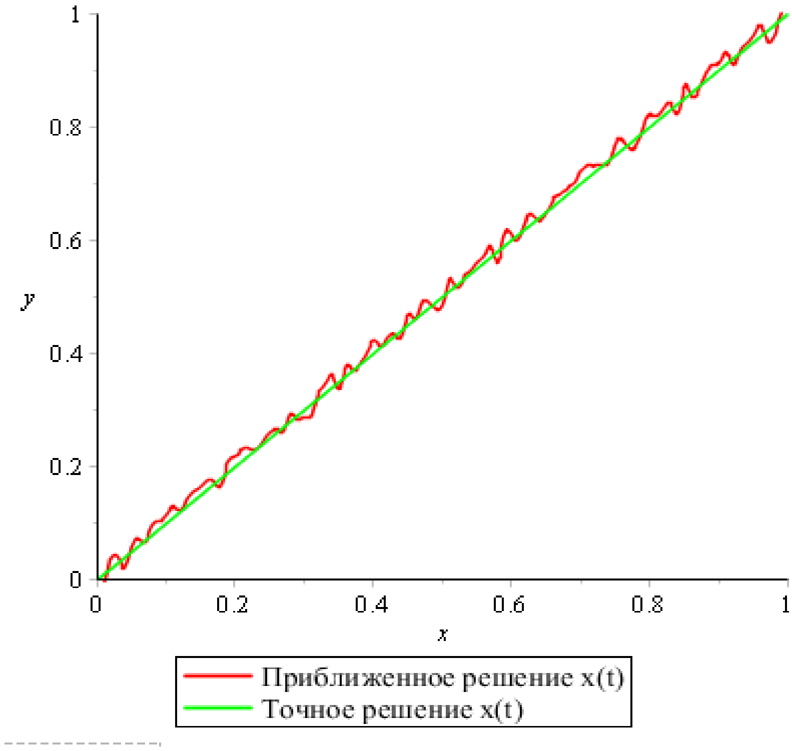


Рисунок 4.9 – Сравнение точного решения
и полученного приближенного решения

***Синтез диаграммы направленности антенны
с топологией «ковра» Серпинского***

Исследуем синтез антенн с раскрывом на предфрактале Серпинского.

Требуется построить антенну с диаграммой направленности

$$f(t_1,t_2)=2{,}0617e^{-((t_1-1{,}5)^2+(t_2-1{,}5)^2)},\quad (t_1,t_2)\in[0,3]^2,$$

продемонстрированной на рисунке 4.10.

Рассмотрим уравнение

$$\iint\limits_{C_n} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2),(t_1,t_2)\in[0,3]^2, \tag{4.1}$$

моделирующее антенну; здесь C_n – n-й предфрактал «ковра» Серпинского.

В качестве ядра возьмем функцию

$$h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=(\tau_1+\tau_2)\frac{1}{32}e^{-\left((t_1-1{,}5)^2+(t_2-1{,}5)^2\right)},\quad (t_1,t_2)\in[0,3]^2,(\tau_1,\tau_2)\in C_n;$$

Точное решение уравнения (4.1): $x(t_1,t_2)=t_1t_2,(t_1,t_2)\in C_n$.

Уравнение (4.1) решалось на предфрактале 2-го порядка.

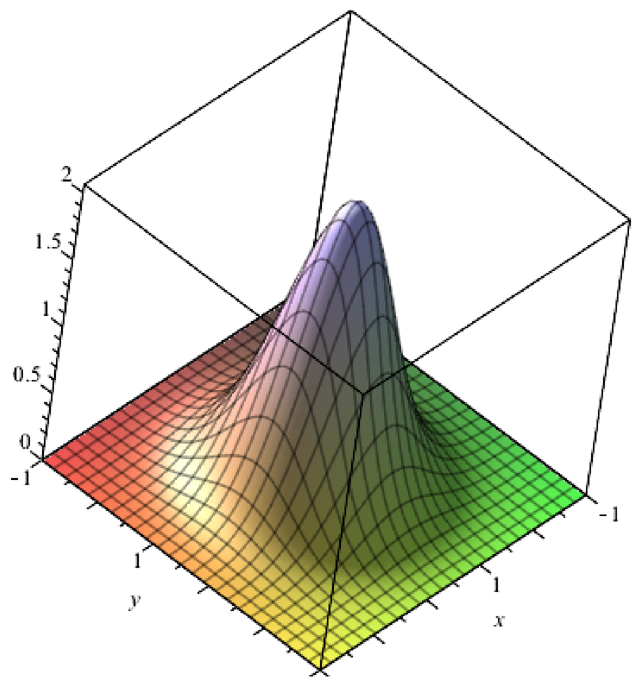


Рисунок 4.10 – Искомая функция сигнала

Точность восстановления правой части $f(t_1,t_2)$ в области $[0,3]^2$ равна $7\cdot 10^{-6}$.

В таблице 4.1 продемонстрированы значения полученной погрешности решения на некоторых узлах.

Таблица 4.1 – Погрешность решения уравнения (4.1)

x	y	Погрешность
0	0,3	$2{,}5971\times 10^{-7}$
0,3	0,3	$5{,}838\times 10^{-7}$
0,6	0,3	0,0000010960
0,9	0,3	0,0000017194
1,2	0,3	0,0000022518
1,5	0,3	0,0000024640
1,8	0,3	0,0000023157
2,1	0,3	0,0000016578
2,4	0,3	0,0000011213
2,7	0,3	$7{,}651\times 10^{-7}$
3	0,3	$1{,}7129\times 10^{-7}$

Численный синтез антенны с заданной диаграммой направленности

Рассмотрим еще одну задачу синтеза антенны на многомерном раскрыве. Диаграмма направленности находится из уравнения

$$h(k_1,k_2)=\int\limits_{\sigma}F(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta=\int\limits_{E_2}\int g(\zeta,\eta)e^{i(k_1\zeta+k_2\eta)}d\zeta d\eta,$$

в котором функция $g(\zeta,\eta)$ есть искомая функция, формирующая необходимую диаграмму направленности антенны.

Пусть необходимо синтезировать антенну, диаграмма направленности которой $h(k_1,k_2)$ показана на рисунке 4.11 и равна

$$h(t,\tau)=e^{-(5t-2.5)^2-(5\tau-2.5)^2}.$$

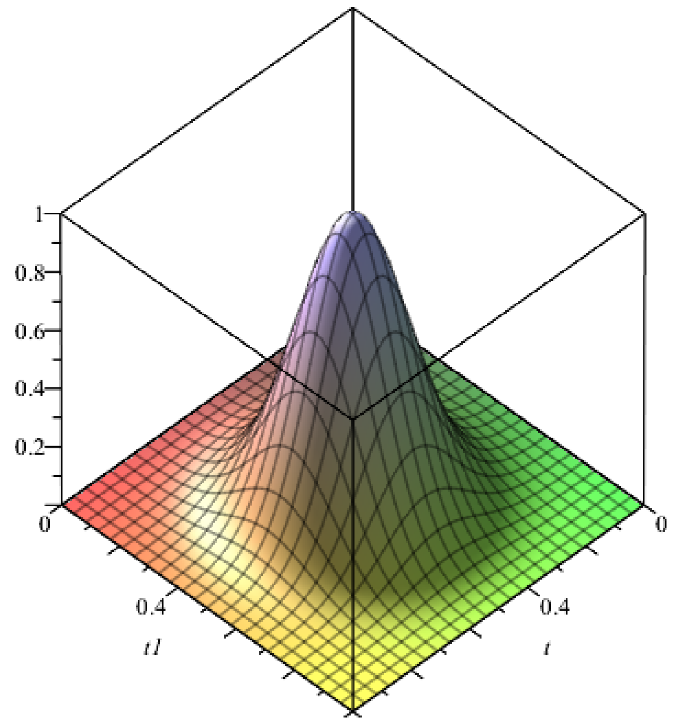


Рисунок 4.11 – Заданная диаграмма направленности

На рисунке 4.12 показан результат восстановления функции $g(\zeta)$.

Для решения данной модельной задачи также было найдено решение с помощью преобразования Фурье. При вычислении функции $g(\zeta)$ с помощью преобразования Фурье в аналитическом виде получен график, приведенный на рисунке 4.13.

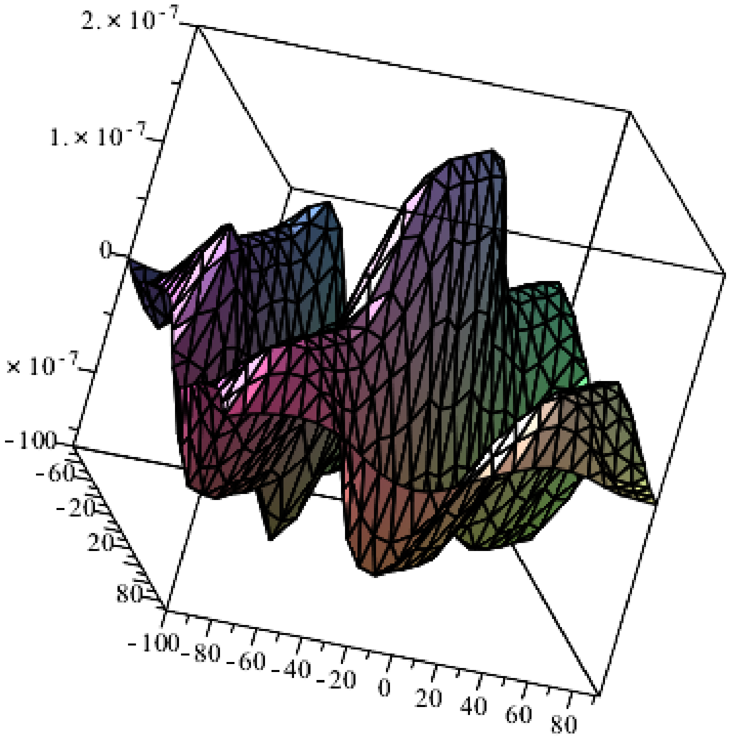


Рисунок 4.12 – График действительной части функции $g(\zeta)$

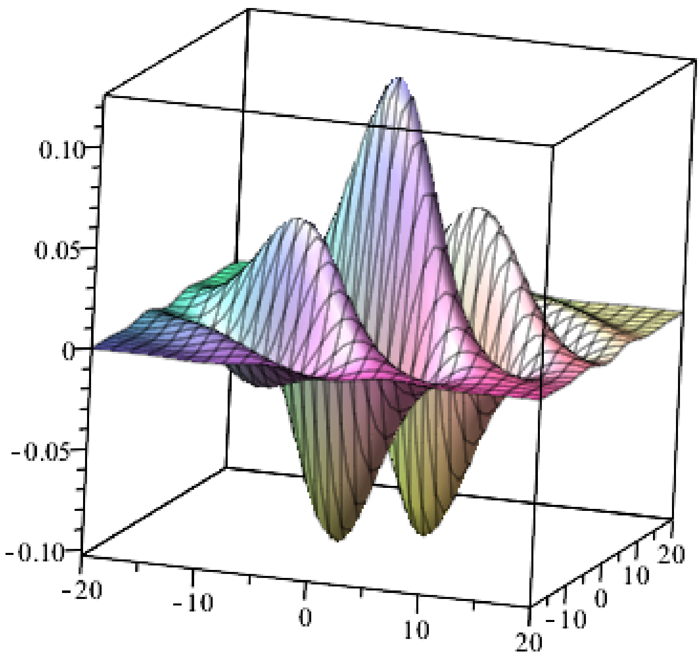


Рисунок 4.13 – График действительной части функции $g(\zeta)$, полученной в аналитическом виде

Если требуемая диаграмма направленности задана дискретно, то разработанные и представленные в разд. 2.1 численные алгоритмы показывают высокую эффективность по сравнению с дискретным преобразованием Фурье (быстрее в 3–4 раза) и быстрым преобразованием Фурье (быстрее на 30–40 %).

Приближенное решение уравнений Поклингтона и Галлена

Приведена иллюстрация численного решения уравнений Поклингтона и Галлена с правой частью в виде синусоидальной и δ-подобной функции.

Рассмотрим классическое уравнение Поклингтона, описанное в разд. 2.2:

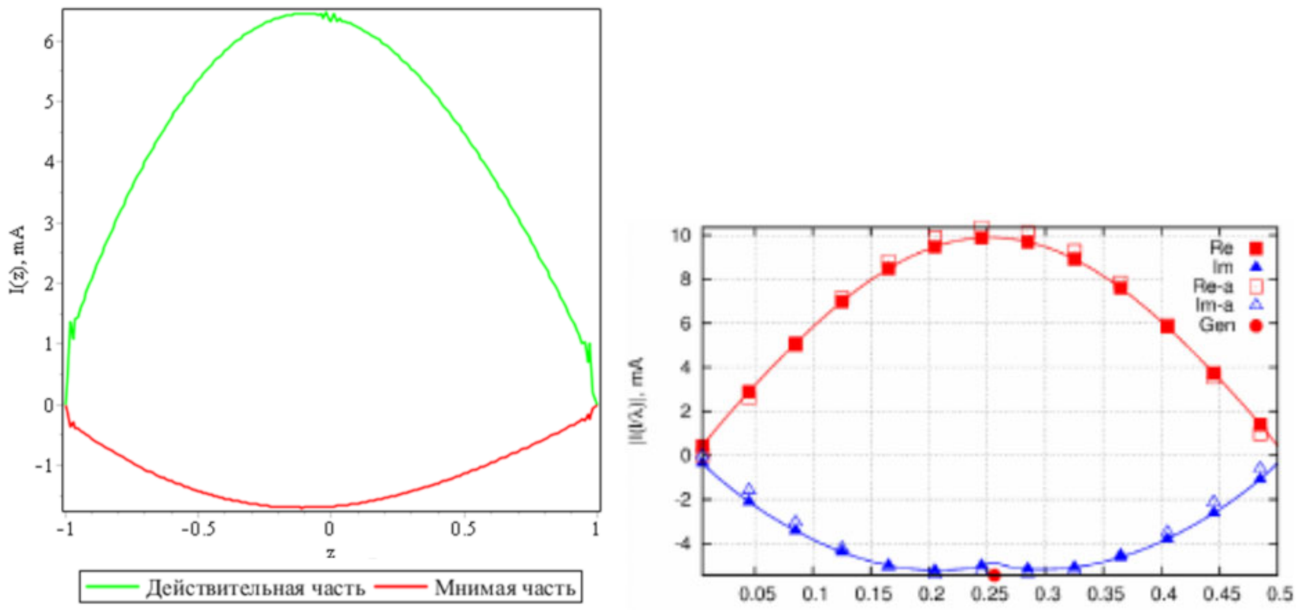
$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\gamma^2\right)\int_{-l}^{l} I_z\left(z'\right)\frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')}dz' = i\omega\varepsilon E_z\left(z\right), \qquad (4.2)$$

где $R\left(z-z'\right)=\sqrt{\left(z-z'\right)^2+a^2}$, $E_z(z)$ – продольная составляющая вектора электрического поля, создаваемого неизвестным распределением тока $I_z(z)$; $\gamma^2 = k^2\varepsilon\mu$, $k=\omega/c$, – волновое число; ε, μ – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость пространства, окружающего вибратор; a – толщина вибратора.

Для подтверждения эффективности построенной вычислительной схемы (2.32), рассмотрим уравнение (4.2) при следующих параметрах: $\frac{l}{\lambda}=0{,}5$ и $\frac{l}{\lambda}=1{,}5$, сравним полученные результаты с известными источниками, например, с работой [76].

На рисунке 4.14 приведено полученное решение при электрической длине вибратора, равной $\frac{l}{\lambda}=0{,}5$.

На рисунке 4.15 приведено полученное решение при электрической длине вибратора, равной $\frac{l}{\lambda}=1{,}5$.



а) *б*)

Рисунок 4.14 – Поверхностная плотность тока для уравнения (4.2) при нормировке, $\dfrac{l}{\lambda} = 0,5$:

а – результаты полученные при помощи вычислительной схемы (2.32);
б – результаты, приведенные в работе [76]

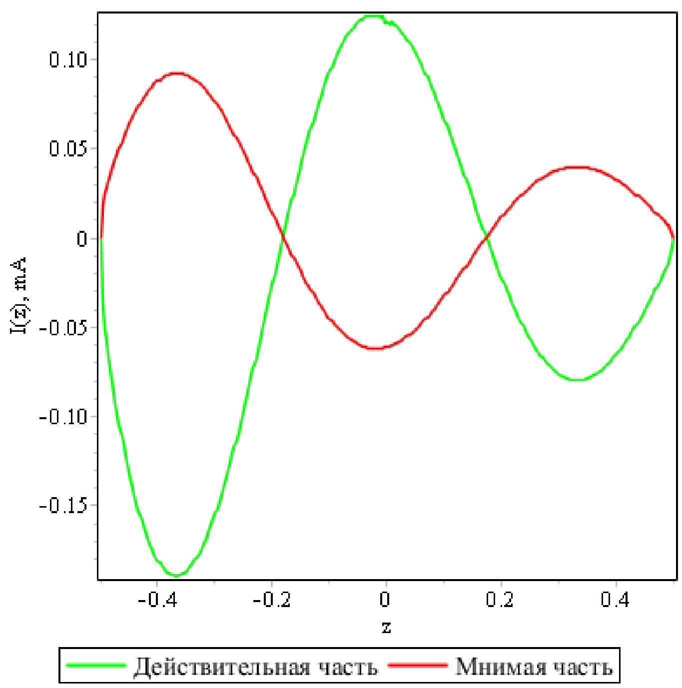
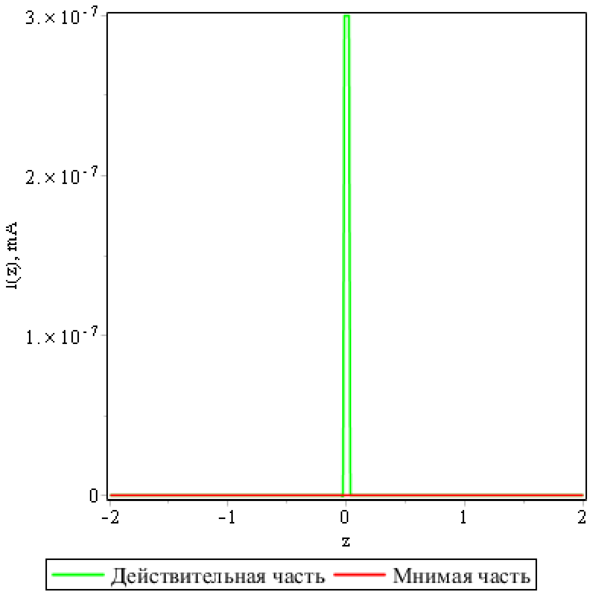


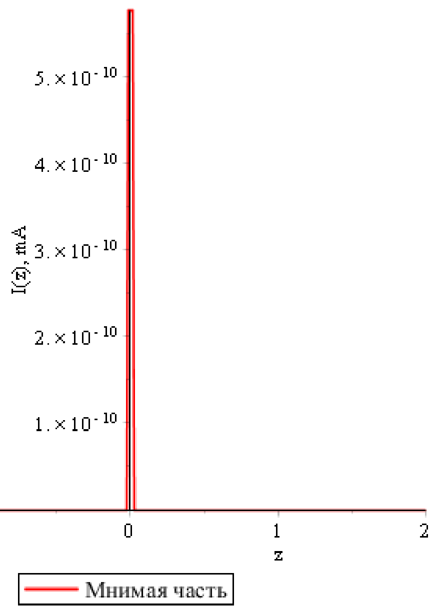
Рисунок 4.15 – Поверхностная плотность тока для уравнения (4.2) при нормировке $\dfrac{l}{\lambda} = 1,5$

Полученные результаты качественно совпадают с результатами, приведенными в работах [58, 76], что позволяет говорить о том, что разработанные численные алгоритмы для решения уравнения Поклингтона являются корректными для анализа тонкого электрического вибратора.

Рассмотрим предельный случай уравнения (4.2) при $a \to 0$ и решим две модельные задачи при $a = 10^{-9}$ и $a = 0$.

На рисунке 4.16 представлено полученное распределение тока при $a = 10^{-9}$.





а) *б*)

Рисунок 4.16 – Плотность тока для уравнения (4.2)
при нормировке $\frac{a}{2l} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$, $\frac{2l}{\lambda} = 1$, $\frac{a}{\lambda} = 2{,}5 \cdot 10^{-9}$:
а – действительная $\mathrm{Re}(I(z))$ и мнимая $\mathrm{Im}(I(z))$ части;
б – мнимая часть $\mathrm{Im}(I(z))$ в увеличенном масштабе

В случае $a = 0$ было получено следующее распределение тока, приведенное на рисунке 4.17.

Рассмотрим уравнение Галлена для симметричного вибратора, т.е. рассмотрим уравнение

$$\int_{-l}^{l} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z). \tag{4.3}$$

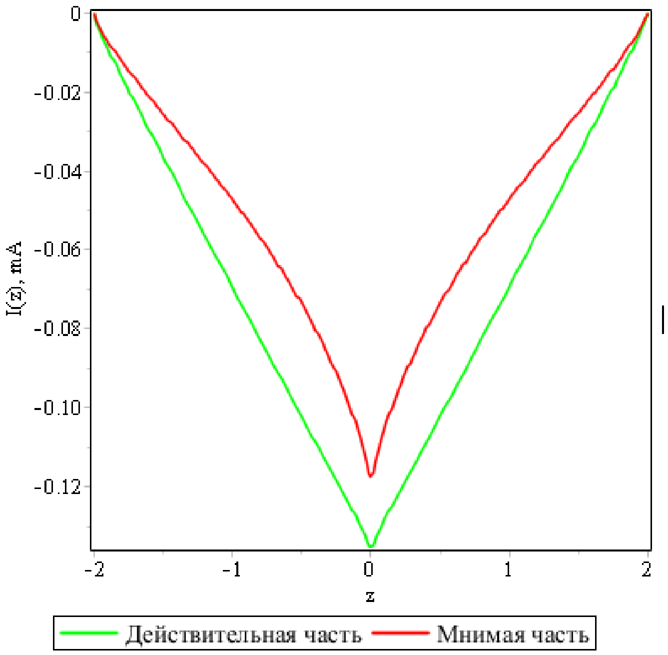


Рисунок 4.17 – Поверхностная плотность тока для уравнения (4.2) при нормировке $\frac{a}{2l}=0$, $\frac{l}{\lambda}=1$, $\frac{a}{\lambda}=0$

Ставится задача решения уравнения (4.3) непрерывным методом решения операторных уравнений. Рассмотрим уравнение (4.3) при следующих параметрах:

$$l=10,$$

$$\gamma=0{,}2096396198,$$

$$R_a(z-z')=\sqrt{(z-z')^2+a^2},$$

$$f(z)=C_1\cos(\gamma z)+C_2\sin(\gamma|z|).$$

Уравнение (4.3) решалось при числе узлов коллокации $N=50$ и числе итераций $m=50$.

Результаты вычислений представлены на рисунке 4.18.

Сравним полученное распределение с теоретическим распределением, приведенным в книгах Р. Митры [55] и Н. И. Войтовича [37]. Полученные результаты при $\frac{2l}{\lambda}=0{,}66$ совпадают с теоретическим распределением плотности тока по симметричному вибратору.

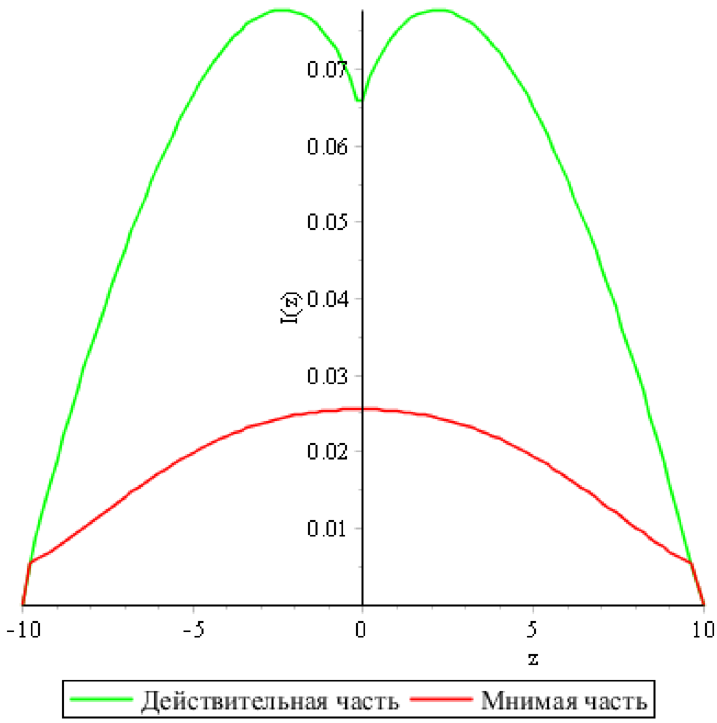


Рисунок 4.18 – Плотность тока в решении уравнения (4.3) при нормировке:

$$\frac{a}{2l} = 0{,}0007495\,;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}66\,;\ \frac{a}{\lambda} = 0{,}0005$$

Рассмотрим еще несколько различных значений нормированного радиуса вибратора для оценки эффективности разработанного вычислительного алгоритма.

Возьмем электрическую длину вибратора, равную $0{,}5$. На рисунке 4.19 приведено полученное распределение тока по поверхности проводника.

Полученное распределение также совпадает с теоретическим распределением тока при $\frac{2l}{\lambda} = 0{,}5$, что подтверждает эффективность разработанного численного метода для решения уравнения Галлена.

В качестве следующих модельных задач рассмотрим уравнение Галлена с дельтоподобной функцией правой части.

Рассмотрим уравнение (4.3) с дельтоподобной правой частью:

$$\int_{-l}^{l} I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = \overline{\delta}(z), \tag{4.4}$$

в котором

$$l = 10,$$
$$\gamma = 0{,}5,$$
$$\delta_1 = 0{,}5,$$
$$\delta_2 = 0{,}05,$$

$$\overline{\delta}(z) = \begin{cases} 0, & -l \le z \le -\delta_1, \\ \dfrac{h(\delta_1 + z)}{\delta_1 - \delta_2}, & -\delta_1 \le z \le -\delta_2, \\ h, & -\delta_2 \le z \le \delta_2, \\ \dfrac{h(\delta_1 - z)}{\delta_1 - \delta_2}, & \delta_2 \le z \le \delta_1, \\ 0, & \delta_1 \le z \le l. \end{cases}$$

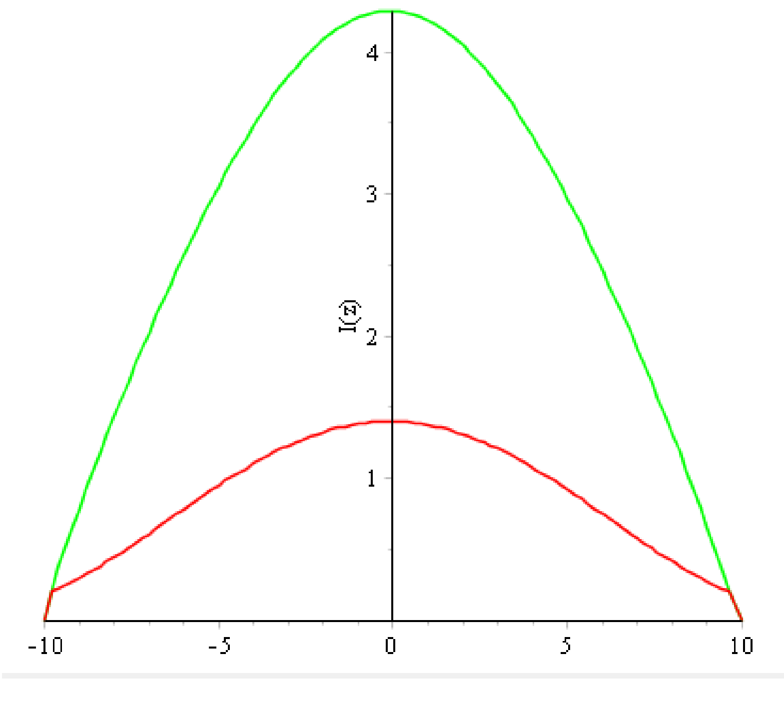
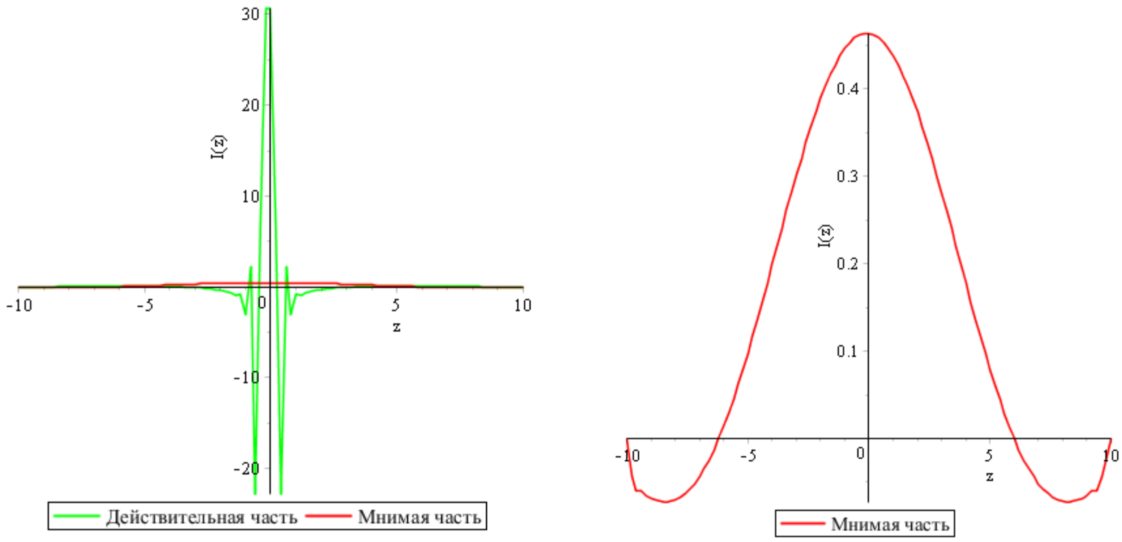


Рисунок 4.19 – Плотность тока в решении уравнения (4.3)
при нормировке:
$$\frac{a}{2l} = 0{,}0007495\,;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}5;\ \frac{a}{\lambda} = 0{,}00037475$$

При решении использовалось $N = 50$ узлов коллокации и было выполнено $m = 50$ итераций.

Результаты вычислений при различных значениях параметра a ($a = 0{,}14999$; $a = 0{,}014999$; $a = 10^{-9}$; $a = 0$) представлены соответственно на рисунках 4.20–4.23.



а) *б*)

Рисунок 4.20 – Плотность тока в решении уравнения (4.4) при нормировке:

$$\frac{a}{2l} = 0{,}007495\,;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}5128\,;\ \frac{a}{\lambda} = 0{,}0146\,;$$

а – действительная часть тока; *б* – мнимая часть тока

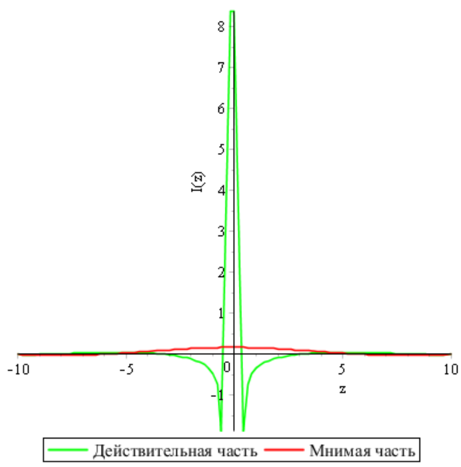
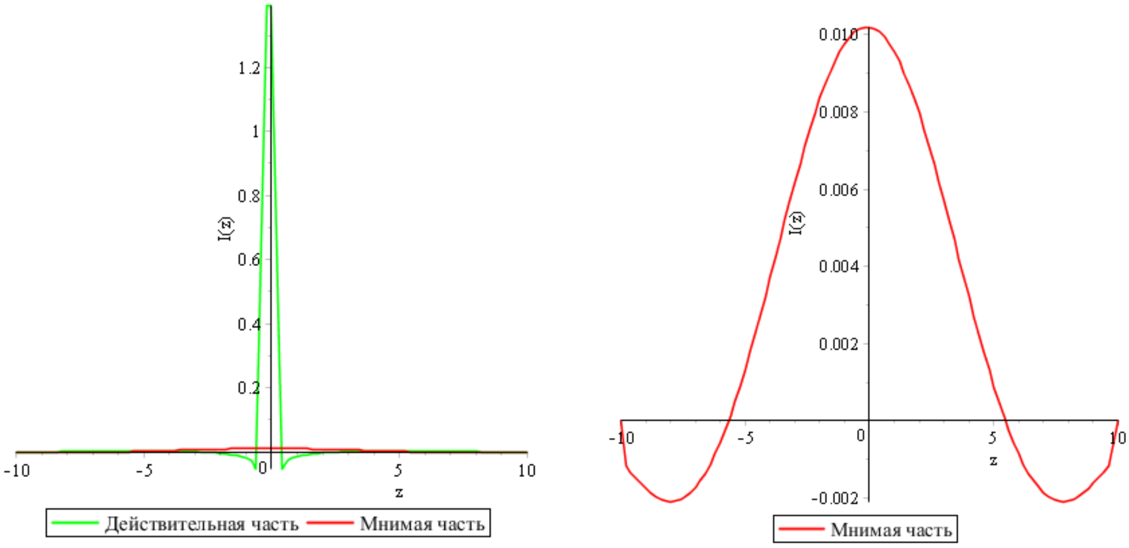


Рисунок 4.21 – Плотность тока в решении уравнения (4.4) при нормировке:

$$\frac{a}{2l} = 0{,}0007495\,;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}5128\,;\ \frac{a}{\lambda} = 0{,}00146$$



а) *б*)

Рисунок 4.22 – Плотность тока в решении уравнения (4.4) при нормировке:

$$\frac{a}{2l} = 2,5 \cdot 10^{-8};\ \frac{2l}{\lambda} = 1;\ \frac{a}{\lambda} = 2,5 \cdot 10^{-9}$$

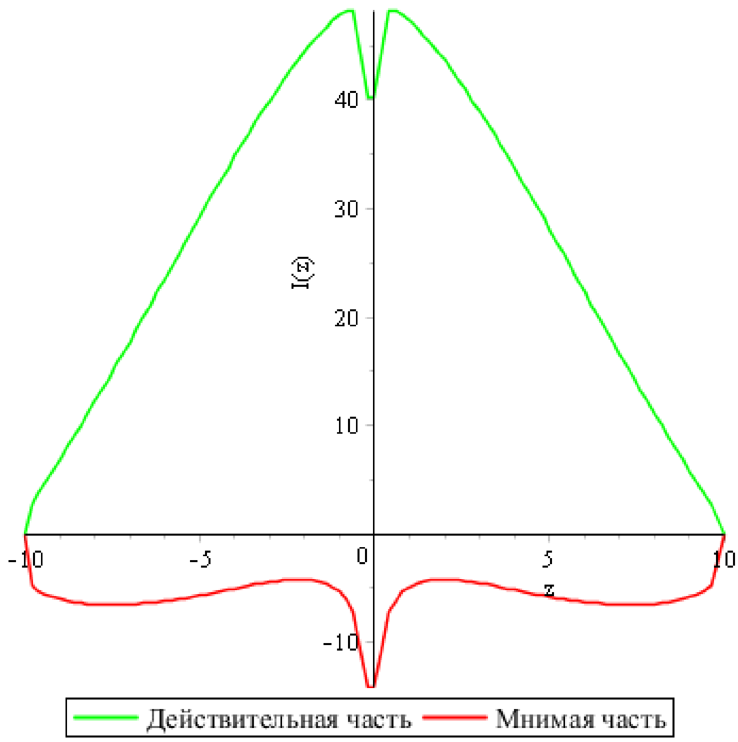
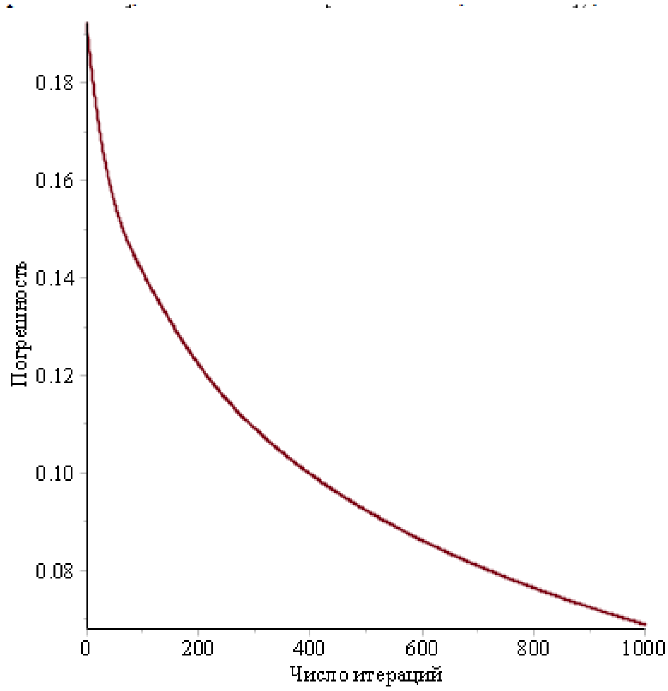


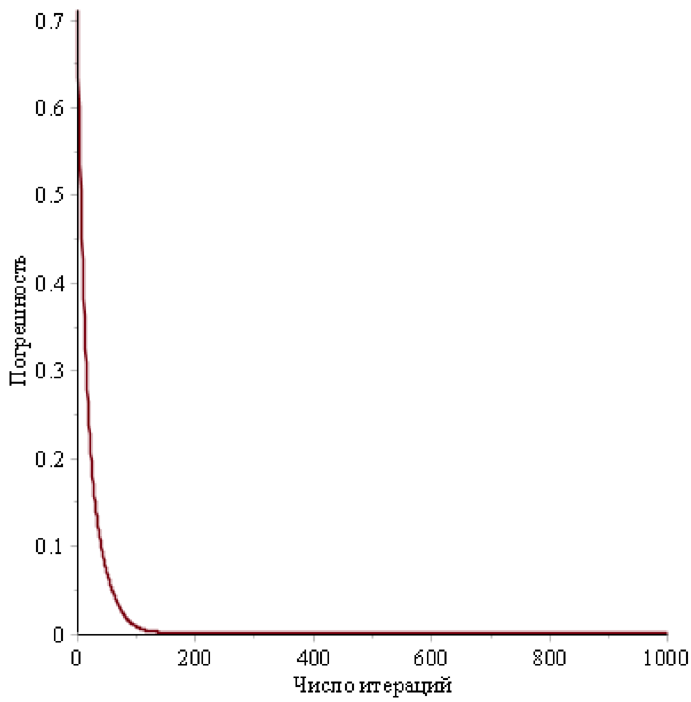
Рисунок 4.23 – Плотность тока в решении уравнения (4.4) при нормировке:

$$\frac{a}{2l} = 0;\ \frac{2l}{\lambda} = 0,5128;\ \frac{a}{\lambda} = 0$$

На рисунке 4.24 представлена зависимость точности решения уравнения Галлена от числа итераций: число узлов коллокации $N = 50$ и число узлов коллокации $N = 100$ при реализации непрерывного операторного метода вычислительной схемой Эйлера.



а) $N = 50$



б) $N = 100$

Рисунок 4.24 – Зависимость погрешности решения уравнения Галлена непрерывным операторным методом от числа итераций

В таблице 4.2 и на рисунке 4.25 представлены значения погрешности полученного решения уравнения Поклингтона на различных итерациях непрерывного операторного метода.

Таблица 4.2 – Значения погрешности при различном числе итераций и числе узлов $N = 50$

Число итераций	Погрешность
50	0,0765009768166801 + 0,0272558430778560 *I*
100	0,0368088433450114 + 0,0304690853397608 *I*
150	0,0169695945869647 + 0,0155704823122877 *I*
200	0,00783788434465691 + 0,00467473746644928 *I*
250	0,00657959172878992 + 0,00398484586937548 *I*
300	0,00559643099305270 + 0,00343507951845824 I
350	0,00485161140749304 + 0,00298238446714207 *I*
400	0,00427693053180959 + 0,00262157657040199 *I*
450	0,00344073421264616 + 0,00210350886905804 *I*
500	0,00284502145304973 + 0,00173916682142525 *I*
600	0,00240544020138449 + 0,00147100563064011 *I*
700	0,00086880634469131 + 0,00126590880729623 *I*
800	0,00018034519278596 + 0,00110426272527609 *I*
900	0,00015156875464667 + 0,00139166821425719 *I*
1000	0,00012035551229596 + 0,00081238446714207 *I*

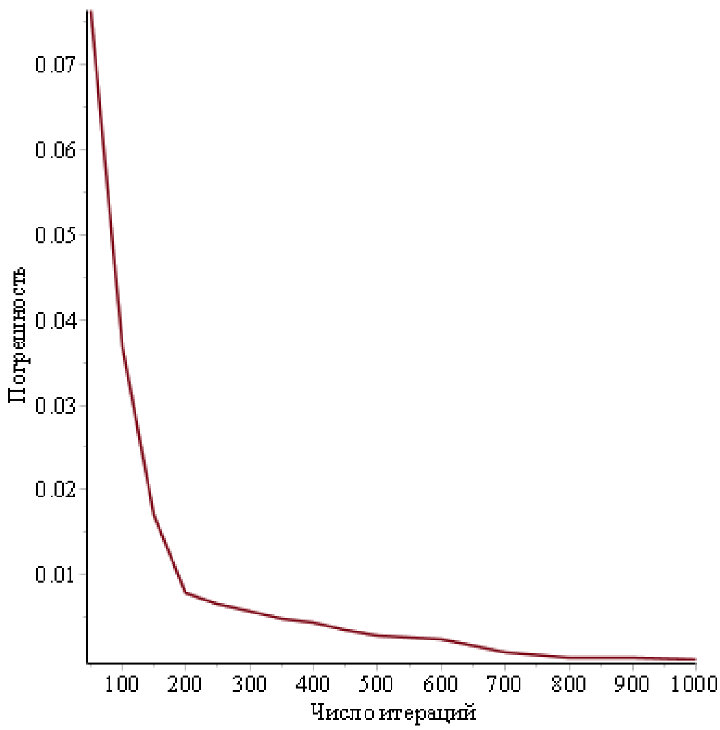


Рисунок 4.25 – Зависимость погрешности решения уравнения Поклингтона непрерывным операторным методом от числа итераций при числе узлов коллокации $N = 100$

Определение параметров электрических вибраторов, при которых математические модели, представленные уравнениями Поклингтона и Галлена, соответствуют физическим процессам

Уравнение Поклингтона решалось при следующих значениях параметров:

$$l = 0{,}1;\ \ k = 16{,}11;$$

$$a = 0{,}025;\ \frac{a}{2l} = 0{,}0125;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}5128,$$

при числе узлов коллокации $2N = 100$.

В таблицах 4.3–4.9 приведены полученные значения тока на концах вибратора в зависимости от используемого сигнала возбуждения в зазоре.

Таблица 4.3 – Зависимость значений тока на концах вибратора от ширины зазора при постоянном сигнале возбуждения в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$0{,}006 - 0{,}0003I$	$0{,}03 - 0{,}0016I$	$0{,}06 - 0{,}003I$	$0{,}12 - 0{,}006I$
$I(l)$	$0{,}004 - 0{,}0002I$	$0{,}02 - 0{,}0011I$	$0{,}04 - 0{,}002I$	$0{,}0788 - 0{,}0043I$

Таблица 4.4 – Зависимость значений тока на концах вибратора от ширины зазора при возбуждении дельтаобразным сигналом в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$0{,}006 - 0{,}0003I$	$0{,}0228 - 0{,}001I$	$0{,}045 - 0{,}0024I$	$0{,}0892 - 0{,}0047I$
$I(l)$	$0{,}004 - 0{,}0002I$	$0{,}015 - 0{,}0008I$	$0{,}03 - 0{,}0016I$	$0{,}0593 - 0{,}0033I$

Таблица 4.5 – Зависимость значений тока на концах вибратора от ширины зазора при возбуждении периодическим сигналом $f(z) = \sin z$ в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$7\cdot10^{-10} + 1\cdot10^{-10}I$	$1\cdot10^{-7} - 4\cdot10^{-9}I$	$9\cdot10^{-7} - 3\cdot10^{-8}I$	$7\cdot10^{-6} - 3\cdot10^{-7}I$
$I(l)$	$3\cdot10^{-10} + 1\cdot10^{-10}I$	$5\cdot10^{-8} - 3\cdot10^{-9}I$	$4\cdot10^{-7} - 2\cdot10^{-8}I$	$3\cdot10^{-6} - 2\cdot10^{-7}I$

Таблица 4.6 – Зависимость значений тока на концах вибратора от ширины зазора при возбуждении периодическим сигналом $f(z)=\sin\frac{\pi z}{h}$ в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$1\cdot 10^{-7} - 3\cdot 10^{-8}I$	$0{,}00002 - 8\cdot 10^{-8}I$	$0{,}00009 - 0{,}000006I$	$0{,}0004 - 0{,}000014I$
$I(l)$	$6\cdot 10^{-7} - 4\cdot 10^{-8}I$	$0{,}00001 - 6\cdot 10^{-8}I$	$0{,}00004 - 0{,}000003I$	$0{,}0002 - 0{,}00001I$

Уравнение Галлена решалось при следующих значениях параметров:

$$l = 0{,}1;\ k = 16{,}11;$$

$$a = 0{,}025;\ \frac{a}{2l} = 0{,}0125;\ \frac{2l}{\lambda} = 0{,}5128,$$

и при числе узлов коллокации $2N = 100$.

Таблица 4.7 – Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора при постоянном сигнале возбуждения в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$-0{,}0468 + 0{,}0540I$	$-0{,}0468 + 0{,}054I$	$-0{,}0949 + 0{,}1076I$	$-0{,}1952 + 0{,}2127I$
$I(l)$	$-0{,}0475 + 0{,}0538I$	$-0{,}0475 + 0{,}0538I$	$-0{,}0949 + 0{,}1076I$	$-0{,}1952 + 0{,}2127I$
a_1	$0{,}0013 - 0{,}0029I$	$0{,}0013 - 0{,}0029I$	$0{,}0036 - 0{,}0065I$	$0{,}0074 - 0{,}0129I$
a_2	$0{,}0053 - 0{,}0037I$	$0{,}0053 - 0{,}0037I$	$0{,}0097 - 0{,}0065I$	$0{,}0196 - 0{,}0129I$

Таблица 4.8 – Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора при возбуждении дельтаобразным сигналом в зазоре

	$h = 0{,}01l$	$h = 0{,}05l$	$h = 0{,}1l$	$h = 0{,}2l$
$I(-l)$	$0{,}000001 + 0{,}0I$	$-0{,}034 + 0{,}039I$	$-0{,}072 + 0{,}082I$	$-0{,}1443 + 0{,}1604I$
$I(l)$	$-0{,}000001 + 0{,}0I$	$-0{,}034 + 0{,}039I$	$-0{,}072 + 0{,}082I$	$-0{,}1443 + 0{,}1604I$
a_1	$0{,}000 + 0{,}0I$	$0{,}0013 - 0{,}0024$	$0{,}0026 - 0{,}005I$	$0{,}0054 - 0{,}0097I$
a_2	$46{,}513700 + 0{,}0I$	$0{,}0036 - 0{,}0024I$	$0{,}0073 - 0{,}005I$	$0{,}0146 - 0{,}0097I$

Таблица 4.9 – Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора при возбуждении периодическим сигналом $f(z)=\sin z$ в зазоре

	$h = 0,01l$	$h = 0,05l$	$h = 0,1l$	$h = 0,2l$
$I(-l)$	$-2\cdot10^{-6}+2\cdot10^{-6}I$	$-9\cdot10^{-6}+1\cdot10^{-5}I$	$5\cdot10^{-6}+1\cdot10^{-6}I$	$4\cdot10^{-5}+1\cdot10^{-5}I$
$I(l)$	$-2\cdot10^{-6}+2\cdot10^{-6}I$	$-1\cdot10^{-5}+1\cdot10^{-6}I$	$-5\cdot10^{-6}-1\cdot10^{-6}I$	$-4\cdot10^{-5}-1\cdot10^{-6}I$
a_1	$0.0-0.0I$	$-4\cdot10^{-7}+1\cdot10^{-7}I$	$-5\cdot10^{-6}+5\cdot10^{-6}I$	$-4\cdot10^{-5}+5\cdot10^{-5}I$
a_2	$0,0-0,0I$	$1\cdot10^{-6}-1\cdot10^{-6}I$	$5\cdot10^{-6}-5\cdot10^{-6}I$	$5\cdot10^{-5}-5\cdot10^{-5}\cdot$

Полученные результаты для уравнений Поклингтона и Галлена позволяют оценить значения тока на концах вибратора. Видно, что при выполнении условия «длина зазора/длина вибратора меньше 0,1» математическая модель, представленная уравнениями Поклингтона и Галлена, адекватна физическим процессам, происходящим в вибраторе.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале Кантора

Для простоты вычислений будем применять разработанную вычислительную схему к нескольким модельным задачам (в каждой задаче на каждом участке предфрактала Кантора брался 1 узел коллокации).

Решить уравнение

$$x(t)+\int\limits_{C_n}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=f(t),\ t\in C_n, \tag{4.5}$$

с точным решением $x(t)=2t^3+5$ на предфракталах Кантора 3, 4, 5 и 6-го порядков.

Вследствие того, что аналитически такие гиперсингулярные интегралы вычисляются только в виде сумм степенных функций, правую часть зададим как сумму аналитически вычисленных интегралов по каждому сегменту $\Delta_i, i=1,...,n$, от функции точного решения.

Результат решения этой задачи, представленной вычислительной схемой (3.2), показан на рисунке 4.26.

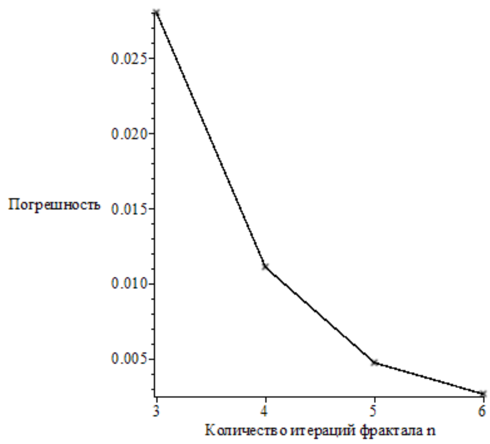


Рисунок 4.26 – Зависимость погрешности приближенного решения уравнения (3.2) на фрактале Кантора от числа итераций фрактала

Вторая модельная задача

Рассмотрим уравнение (4.5) при точном решении $x(t)=t\sin(t)\cos(t)$ на предфракталах совершенного множества Кантора 3, 4, 5 и 6-го порядков.

Вследствие того, что аналитически такие гиперсингулярные интегралы вычисляются только в виде сумм степенных функций, правую часть зададим как сумму аналитически вычисленных интегралов по каждому сегменту $\Delta_i, i=1,...,n$, от функции точного решения.

На рисунке 4.27 приведен результат решения этой задачи разработанным в главе 3 методом.

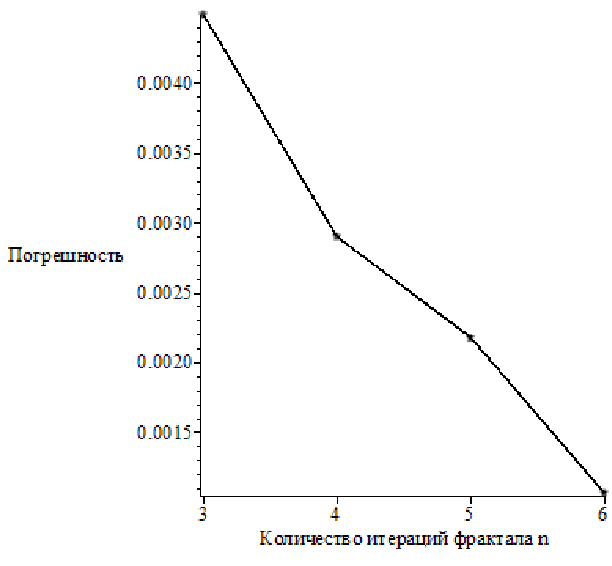


Рисунок 4.27 – Зависимость погрешности приближенного решения уравнения (3.5) на фрактале Кантора от числа итераций фрактала

Третья модельная задача

Пусть уравнение (4.5) имеет решение $x(t)=te^{t+2}$ на предфракталах совершенного множества Кантора 3, 4, 5 и 6-го порядков. Правую часть зададим как сумму аналитически вычисленных интегралов по каждому сегменту $\Delta_i, i=1,...,n,$ от функции точного решения.

Результат решения этой задачи, представленной выше вычислительной схемой (3.2), показан на рисунке 4.28.

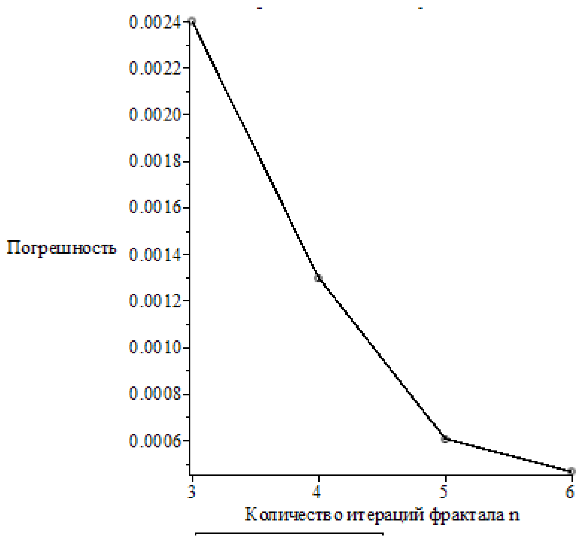


Рисунок 4.28 – Зависимость погрешности приближенного решения линейного гиперсингулярного интегрального уравнения на совершенном множестве Кантора от числа итераций фрактала

Замечание. Количество используемых узлов на каждой итерации фрактала Кантора равно 2^m, где m – число итераций фрактала Кантора.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактале «ковер» Серпинского

Реализуем вычислительную схему (3.11) на нескольких модельных примерах.

Первая модельная задача

Решим уравнение

$$\int\limits_{\Omega_n} \frac{x(\tau_1,\tau_2)}{\left((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2\right)^{3/2}} d\tau_1 d\tau_2 = f(t),\ t=(t_1,t_2)\in\Omega_n, \tag{4.6}$$

здесь $x(t,\tau)=t^2+\tau^3$ – точное решение на предфрактале Серпинского 2-го порядка.

Правую часть зададим как сумму аналитически вычисленных интегралов по каждой области $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j=1..8,\ j=1,\ldots,n,$ от функции точного решения.

Результаты решения этой модельной задачи показаны на рисунке 4.29.

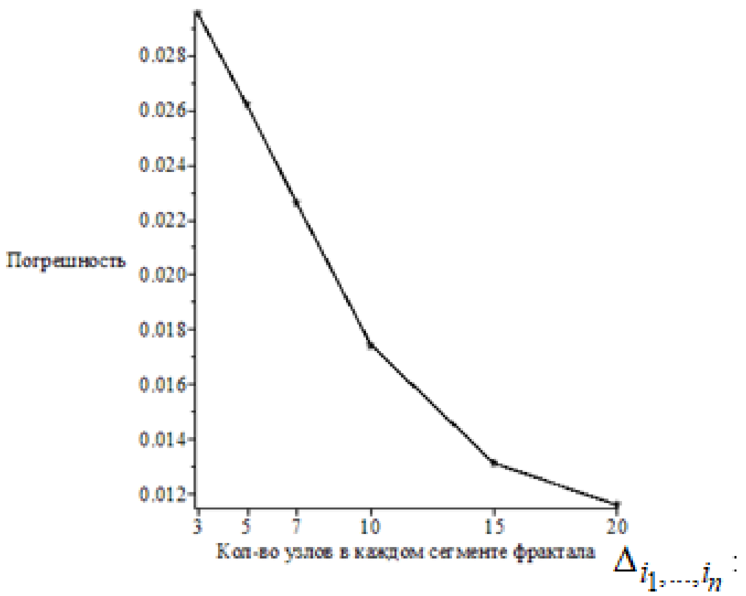


Рисунок 4.29 – Зависимость погрешности приближенного решения линейного гиперсингулярного интегрального уравнения на фрактале Серпинского от числа узлов в каждом квадрате фрактала $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$

Вторая модельная задача

Рассмотрим уравнение (4.6) на предфрактале Серпинского 2-го порядка.

Точное решение уравнения $x(t,\tau)=t^3\tau+0{,}128+2{,}12\tau.$

Так как интегралы в уравнении (4.6) не вычисляются аналитически, то правую часть зададим как сумму аналитически вычисленных интегралов по каждому квадрату $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ от функции точного решения $x(t,\tau)$.

Результаты решения этой модельной задачи показаны на рисунке 4.30.

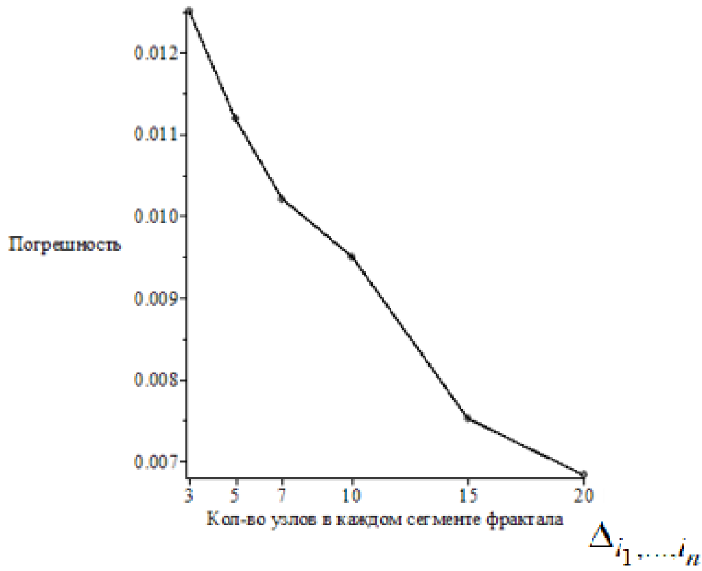


Рисунок 4.30 – Зависимость погрешности приближенного решения линейного гиперсингулярного интегрального уравнения на фрактале Серпинского от числа узлов в каждом квадрате фрактала $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$

Замечание. Количество используемых узлов на каждой итерации фрактала Серпинского равно $8^m \cdot n_1$, где m – число итераций, а n_1 – число узлов в каждом сегменте «ковра» Серпинского.

Линейное уравнение на числовой оси

В главе 3 для решения линейного уравнения

$$a(t)x(t)+b(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau = f(t), p=2,4,\dots, \tag{4.7}$$

были предложены три вычислительных схемы. Ниже для решения гиперсингулярного уравнения (4.7) используется третья вычислительная схема (см. формулу (3.32)).

Аппроксимируем уравнение (4.7) следующим образом:

$$a(t)x(t)+b(t)\int\limits_{-A}^{A}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau = f(t), p=2,4,\dots,$$

где A – достаточно большое положительное число.

Разобьем участок $[-A,A]$ на $2N+1$ равных отрезков точками t_k, равными $t_k=-A+\frac{kA}{N}$, $k=0,1,\ldots,2N$. Получим множество отрезков $\Delta_k:\Delta_{-1}=(-\infty,t_0)$, $\Delta_k=[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,\ldots,2N-1$, $\Delta_{2N}=[t_{2N},\infty)$.

Введем сетку узлов t'_k:

$$t'_l=t_{l+1}-\frac{A}{2N},\ l=-1,...,2N-1,\ t'_{2N}=A+\frac{A}{2N}.$$

Приближенное решение уравнения (4.7) ищем в виде кусочно-постоянной функции:

$$x_N(t)=\sum_{k=-1}^{2N}\alpha_k\psi_k(t),$$

$$\psi_k(t)=\begin{cases}1,\ t\in\Delta_k,\\ 0,\ t\in(-\infty,\infty)\setminus\Delta_k,\end{cases}\quad k=-1,0,1,\ldots,2N,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы

$$a(t'_l)\alpha_l+b(t'_l)\sum_{k=-1}^{2N}\alpha_k\int\limits_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-t'_l)^p}=f(t'_l),\ l=-1,0,1,\ldots,2N. \tag{4.8}$$

Применим данную вычислительную схему для решения нескольких модельных задач.

Первая модельная задача

Решим уравнение

$$50x(t)-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=f(t) \tag{4.9}$$

с точным решением

$$x(t)=1+\frac{1}{1,5+t^2}$$

и с функцией $f(t)$, равной

$$f(t) = -\frac{2{,}094395102\left(12It - 4{,}898979486t^2 + 7{,}348469228\right)}{4t^4 + 12t^2 + 9}.$$

На рисунке 4.31 представлена зависимость погрешности решения уравнения (4.9) от параметра A.

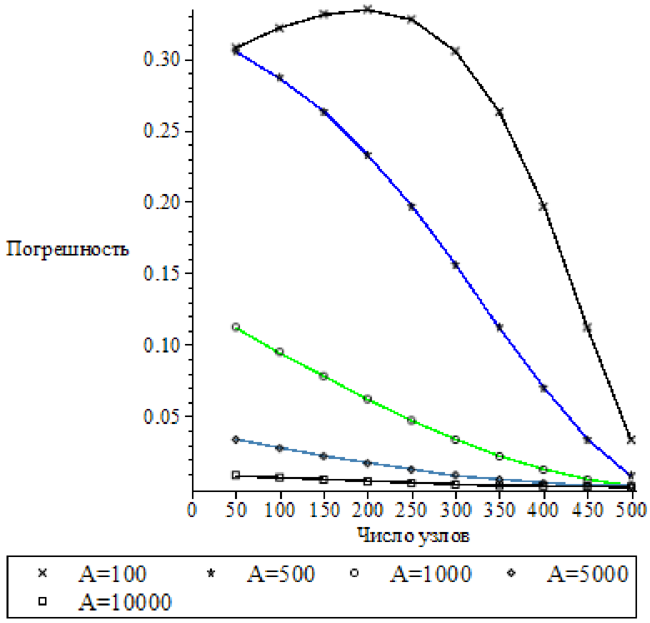


Рисунок 4.31 – Зависимость погрешности приближенного решения линейного гиперсингулярного интегрального уравнения (4.8) от количества узлов N и коэффициента A

Вторая модельная задача

Решим уравнение

$$2x(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t). \tag{4.10}$$

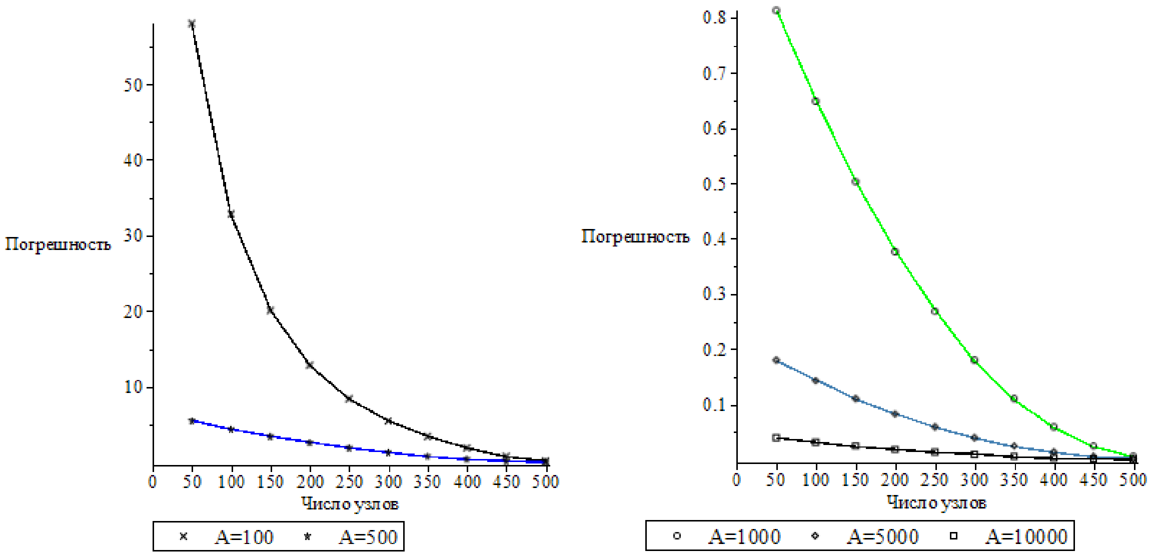
Точное решение

$$x(t) = \frac{1}{\left(1 + t^2\right)\left(\frac{3}{5} - \sqrt{t}\right)},$$

правая часть:

$$f(t) = x(t) = \frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(\dfrac{3}{5} - \sqrt{t}\right)}.$$

На рисунке 4.32 представлена зависимость погрешности решения уравнения (4.10) от параметра A.



а) *б*)

Рисунок 4.32 – Зависимость погрешности приближенного решения линейного гиперсингулярного интегрального уравнения (4.10) от количества узлов N и коэффициента A:
а – параметр A равен 100 и 500;
б – параметр A равен 1000, 5000 и 10000

Нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения

В главе 3 были построены приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений. Ниже иллюстрируется эффективность этих методов.

Реализуем разработанный в главе 3 алгоритм для задачи с известным решением.

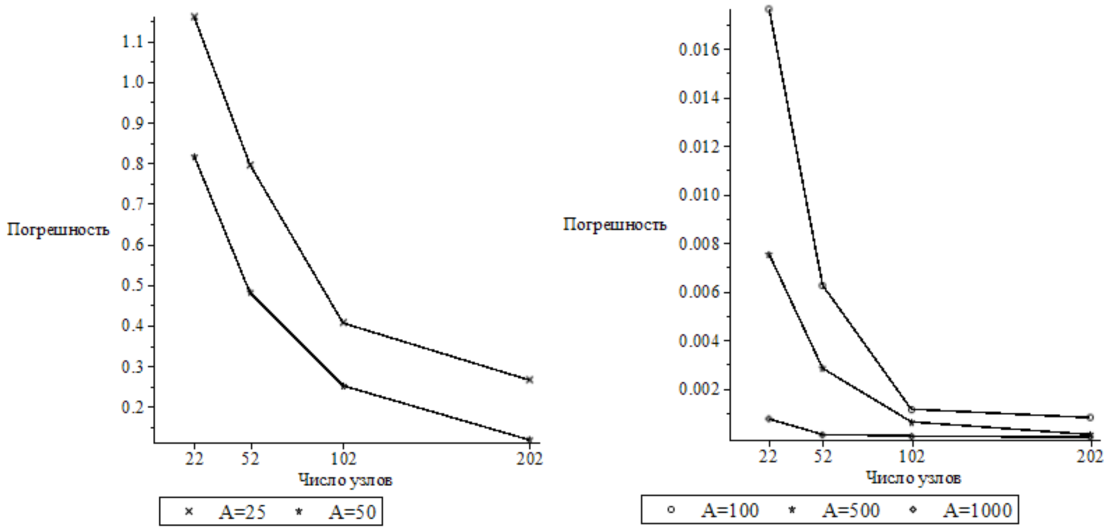
Решим нелинейное уравнение

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau+\sin\left(\frac{2\pi x(t)}{\sqrt{3}}\right)=0, \qquad (4.11)$$

имеющее точное решение

$$x(t)=-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right).$$

На рисунке 4.33 представлены результаты решения уравнения (4.11) при различных значениях параметра A.



а)　　　　　　　　*б*)

Рисунок 4.33 – Зависимость погрешности приближенного решения нелинейного гиперсингулярного интегрального уравнения (4.10) от количества узлов N и коэффициента A:
а – параметр A равен 100 и 500;
б – параметр A равен 1000, 5000 и 10000

Непрерывный метод решения операторных уравнений

В разд. 1.6 был приведен используемый в большинстве вычислительных схем и алгоритмов, приведенных в диссертации, непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений. Приведем оценки его устойчивости и скорости сходимости при решении систем уравнений на спектре.

Рассмотрим следующую модельную задачу: требуется решить интегральное уравнение

$$\int_0^1 x(\tau)\frac{-2t\tau-\tau^2}{(\tau-t)^2+0.05}d\tau=\ln\Big[\big(20t^2+1\big)\big(20t^2-40t+21\big)\Big]\times$$
$$\times\big(-15t^3+3,5t^2+4,45t-0.025\big)+\big(\operatorname{arctg}(4.47t)+\operatorname{arctg}(4.47t-4.47)\big)$$
$$\times\big(40.25t^4-13,42t^3-34,88t^2+1,12t+0,48\big)-1,65 \qquad (4.12)$$

с точным решением $x(t)=2+t-3t^2$.

Введем в рассмотрение следующую сетку узлов: $t_i=i\frac{1}{N},\ i=0,...,N$.

Приближенное решение уравнения (4.12) будем искать в виде кусочно-постоянной функции:

$$x_N(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\psi_i(t),$$

$$\psi_i(t)=\begin{cases}1, & t\in\Delta_i,\\ 0, & t\in[0,1]\setminus\Delta_i,\end{cases}\quad i=1,\ldots,N,\ N=2^n,$$

где $\Delta_i=\left[t_i\ ,t_{i+1}\right]$.

Применяя метод коллокации по узлам $t_i'=t_i+\frac{1}{2N},i=0,...,N-1$, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{-2t_j'\tau-\tau^2}{\left(\tau-t_j'\right)^2+0.05}d\tau=f\left(t_j'\right),\ j=0,...,N-1.$$

Полученная система является плохообусловленной, из-за чего многие методы решения СЛАУ неприменимы. Обозначим через A матрицу в левой части системы. Из-за громоздкости матрицы, приводить ее не будем. Приведем собственные значения матрицы A:

$$\begin{pmatrix} -12,12 \\ -3,78 \\ -1,59 \\ -0,7 \\ -0,15 \\ -0,03 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

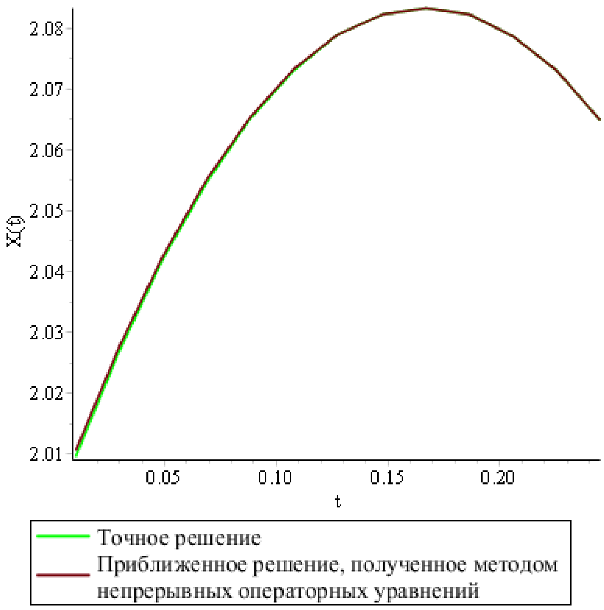
Очевидно, имеем классическую задачу на спектре.

В таблице 4.10 приведены значения точного решения и приближенных решений, полученные непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений и методами, встроенными в математические пакеты (MATLAB, maple):

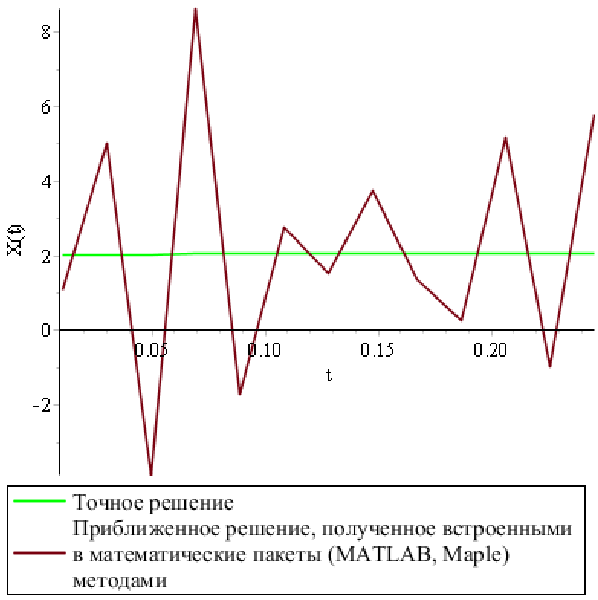
Таблица 4.10 – Результаты решения уравнения (4.10)

t'_j	Точное решение	Метод решения непрерывных операторных уравнений	Встроенные в математические пакеты методы
0,01000000000	2,009700000	2,0106871499260888	1,0611017446841022
0,02960784314	2,026977970	2,0278000120960495	5,029693878751252
0,04921568627	2,041949135	2,042601755086477	–3,854539775104197
0,06882352941	2,054613494	2,055101017167799	8,638860166537066
0,08843137255	2,064971050	2,065308100986316	–1,722766454492227
0,1080392157	2,073021800	2,073231649222157	2,7731311465518296
0,1276470588	2,078765744	2,078897477175838	1,5491129517260136
0,1472549020	2,082202884	2,082272290778274	3,733149909190063
0,1668627451	2,083333218	2,083359672884521	1,3698586161739996
0,1864705882	2,082156747	2,0821769922937134	0,2699301292279742
0,2060784314	2,078673471	2,0787119739692614	5,186011565956849
0,2256862745	2,072883390	2,0729476695322924	–0,978501076979457
0,2452941176	2,064786506	2,064892691414061	5,8089567560154585

На рисунке 4.34 приведены результаты сравнения решения, полученного с помощью непрерывного метода решения операторных уравнений, и решений, полученных методами, встроенными в математические пакеты. Максимальная невязка полученных решений равна 10^{-15} (как в случае непрерывного метода решения операторных уравнений, так и в случае встроенных методов в пакеты Maple и MATLAB), однако непрерывный метод решения операторных уравнений, в отличие от пакетов Maple и MATLAB, продемонстрировал, как показано ниже, устойчивость при достаточно больших возмущениях.



а)



б)

Рисунок 4.34 – Сравнение решения, полученного с помощью:
а – непрерывного метода решения операторных уравнений;
б – встроенных в сторонние пакеты методов

В таблице 4.11 приведены значения максимальной погрешности при различном числе итераций.

Таблица 4.11 – Значения погрешности решения при различном числе итераций

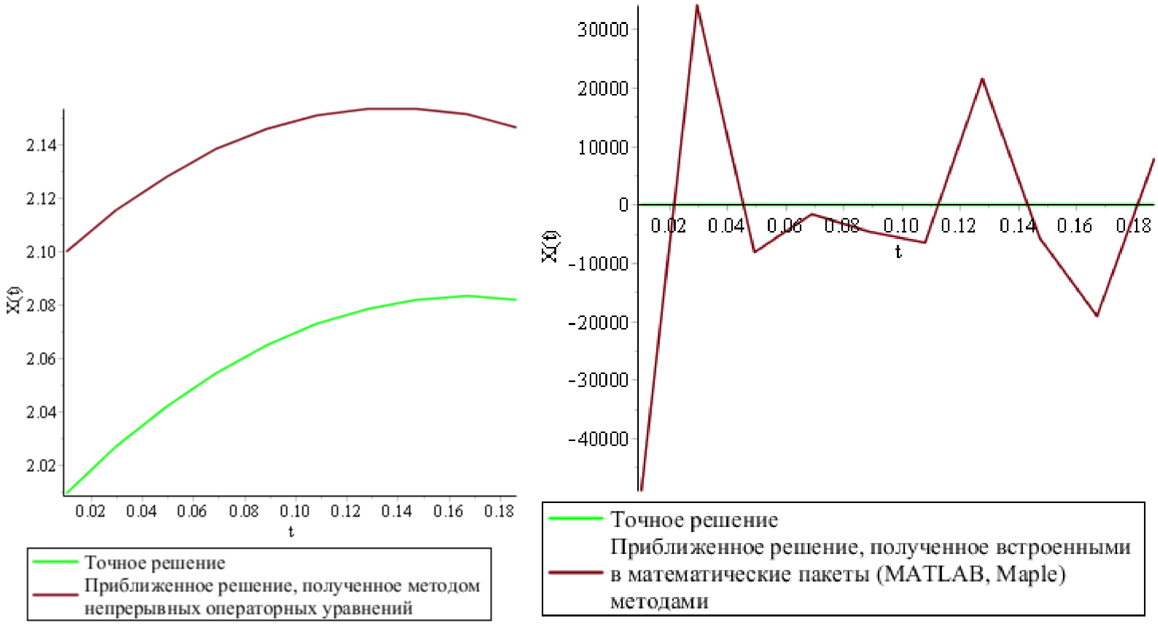
Количество итераций	Погрешность
10	0,254562025510885
20	0,121639842089197
50	0,0411159691427563
100	0,0180070671530914
200	0,00774233320850204
300	0,00475248472119993
500	0,00254399187169163
1000	0,000885511246610404

В таблице 4.12 приведены значения точного решения и приближенных решений, полученные непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений и методами, встроенными в математические пакеты (MATLAB, Maple), при внесении случайных возмущений, не превосходящих по модулю 0,1, в вектор правой части.

Таблица 4.12 – Результаты решения уравнения (4.10) с возмущением функции правой части

t'_j	Точное решение	Метод решения непрерывных операторных уравнений	Встроенные в математические пакеты методы
0,01000000000	2,009700000	2,100142690107541	–48822,99666887001
0,02960784314	2,026977970	2,115418983106538	34358,85972446414
0,04921568627	2,041949135	2,1281569440485373	–8037,728472239252
0,06882352941	2,054613494	2,1383526144441065	–1380,655742785527
0,08843137255	2,064971050	2,1460080654349647	–4561,881881086675
0,1080392157	2,073021800	2,1511317182886764	–6520,863075981914
0,1276470588	2,078765744	2,1537384986704686	21654,70865712038
0,1472549020	2,082202884	2,153848652060093	–5700,648037193191
0,1668627451	2,083333218	2,151487998839436	–19089,29567230029
0,1864705882	2,082156747	2,1466867948412505	8149,006247019127

На рисунке 4.35 проиллюстрированы результаты, представленные в таблице 4.12.



а) *б*)

Рисунок 4.35 – Сравнение решения с внесенным возмущением в вектор правой части, равным 0,1, полученного с помощью: *а* – непрерывного метода решения операторных уравнений; *б* – встроенных в сторонние пакеты методов

Как можно видеть из таблицы 4.12, исследуемый непрерывный метод решения операторных уравнений обладает хорошей устойчивостью к возмущениям в начальных данных.

Отметим, что теоретическая погрешность при использовании метода коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией равна $O\left(N^{-1}\right)$, где N – число узлов коллокации.

Для реализации получаемой в непрерывном методе решения операторных уравнений системы дифференциальных уравнений применялся метод Эйлера. Результаты, представленные в таблице 4.10, получены на 500-й итерации метода Эйлера в непрерывном методе решения операторных уравнений. При этом коэффициент h в методе Эйлера был равен $0{,}01$. Увеличение значения коэффициента h в методе Эйлера, а также применение более высокоточных методов (например, методов семейства Рунге – Кутта 4-го или более высоких порядков) позволит увеличить скорость сходимости приближенного решения к точному.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4

Разработаны два комплекса программ. Первый комплекс позволяет синтезировать антенну с заданными параметрами. Он состоит из программы, генерирующей функцию, синтезирующую заданный сигнал на фрактальных топологиях, программы синтезирующей антенну, обладающую заданной диаграммой направленности и программы, определяющей распределение тока по проводнику. Программы реализуют решения уравнений Поклингтона и Галлена. Второй комплекс программ предназначен для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях, включая фрактальные. Он состоит из программы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактальных многообразиях (на совершенном множестве Кантора и «ковре» Серпинского), программы для решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси.

Выполнены расчеты функции, синтезирующей антенну с заданными параметрами, с заданной диаграммой направленности (как проекцией на плоскость, так и трехмерной). Продемонстрирована эффективность разработанного программного комплекса для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на модельных задачах. Полученные результаты проиллюстрировали эффективность разработанных алгоритмов и полное соответствие теоретических утверждений с результатами экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены и обоснованы численные алгоритмы решения уравнений, описывающих распределение тока по проводнику, которые позволяют, при сохранении точности сократить время решения этих уравнений по сравнению со стандартными методами на 27 %.

Обобщен алгоритм локальных поправок для решения задачи синтеза антенн в первом приближении, моделируемых уравнением Фредгольма первого рода, расширена область применения этого метода на фрактальные многообразия и увеличена эффективность расчета диаграммы направленности антенны и распределения тока по проводнику за счет уменьшения числа арифметических операций.

Разработана методика решения гиперсингулярных интегральных уравнений с кусочно-постоянной и кусочно-линейной аппроксимацией на фрактальных многообразиях в одномерном и двумерном случае, а также на числовой прямой. Ранее подобные уравнения на фрактальных областях интегрирования и бесконечной числовой прямой не исследовались. В отличие от известных алгоритмов, построенная методика является более устойчивой, не требует регуляризации и полученное решение сходится к решению исходного уравнения в регулярном и исключительных случаях.

Продемонстрирована более высокая, по сравнению со стандартными методами, устойчивость разработанных алгоритмов решения уравнений, описывающих распределение тока по проводнику на спектре. Расширена по сравнению со стандартными методами область применения разработанных алгоритмов при решении задач с плохо обусловленными матрицами. Это позволяет решать задачу распределения тока по проводнику при больших колебаниях начальных данных.

Разработаны два комплекса программ, реализующие построенные численные алгоритмы. Первый комплекс программ позволяет синтезировать антенну с заданными параметрами в первом приближении. Он состоит из трех программ:

генерирующей функцию, синтезирующую заданный сигнал на фрактальных топологиях; программы, синтезирующей антенну, обладающую заданной диаграммой направленности; программы, определяющей распределение тока по проводнику. Второй комплекс программ предназначен для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях, включая фрактальные, которые могут возникать при нахождении распределения тока по проводнику, построении диаграммы направленности антенны и многих других технических задачах. Он состоит из программы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фрактальных многообразиях, программы для решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси. В процессе исследований комплекс программ продемонстрировал высокую работоспособность и эффективность при решении задач синтеза антенн с заданными параметрами, а также при решении гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях, включая фрактальные.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – Москва : Наука, 1978. – 351 с.
2. Айзенберг, Г. З. Коротковолновые антенны / Г. З. Айзенберг, С. Л. Белоусов, Э. М. Журбенко, Г. А. Клигер, А. Г. Курашов. – Москва : Радио и связь, 1985. – 536 с.
3. Айкашев, П. В. Методы фрактальной геометрии в теории антенн / П. В. Айкашев // Modern science. – 2020. – № 10-1. – С. 362–369.
4. Айкашев, П. В. Применение метода коллокации n-го порядка для решений гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / П. В. Айкашев // Инженерные технологии: химия, биология, медицина и информационные технологии в промышленности : сборник научных статей по итогам Международной научной конференции (Волгоград, 22–23 октября 2020 г.) / Научно-производственное предприятие Медпромдеталь. – Волгоград : Медпромдеталь, 2020. – С. 29–33.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы: анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н. С. Бахвалов. – Москва : Наука, 1975. – 632 с.
6. Белов, К. И. Кольцевые фрактальные антенны / К. И. Белов, Б. Б. Лебедев // Неделя науки СПбГПУ. Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций : материалы научно-практической конференции с международным участием (2–7 декабря 2013 г.). – Санкт-Петербург : Государственный политехнический университет, 2014. – Часть 1. – С. 3–5.
7. Бисплингхофф, Р. Аэроупругость / Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмен. – Москва : Иностранная литература, 1958. – 283 с.
8. Божокин, С. В. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

9. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Динамические системы. – 2019. – Т. 9 (37), № 3. – С. 244–272.

10. Бойков, И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.

11. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. – 377 с.

12. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 247 с.

13. Бойков, И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 297 с.

14. Бойков, И. В. Об одном численном методе синтеза фрактальных антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 1. – С. 51–67.

15. Бойков, И. В. К вопросу об анализе и синтезе фрактальных антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2018. – № 1. – С. 92–100.

16. Бойков, И. В. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси / И. В. Бойков, П. В. Айкашев, А. И. Бойкова // Журнал Средне-Волжского математического общества. – 2020. – Т. 22, № 4. – С. 405–423.

17. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси / И. В. Бойков, П. В. Айкашев, М. А. Семов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2. – С. 78–90.

18. Бойков, И. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн /

И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3. – С. 127–146.

19. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2021. – № 1. – С. 66–84.

20. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах: вычислительный эксперимент-I / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : труды IX Международной конференции / под редакцией И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – С. 32–40.

21. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах: вычислительный эксперимент-II / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : труды X Международной конференции / под редакцией И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – С. 32–37.

22. Бойков, И. В. Об одном численном методе моделирования фрактальных антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : труды XI Международной конференции / под редакцией И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 55–61.

23. Бойков, И. В. Сплайн-коллокационный метод решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : труды XIII Международной конференции / под редакцией И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 89–92.

24. Бойков, И. В. Сплайн-коллокационный метод решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-

научных и социальных проблем : труды XIII Международной конференции / под редакцией И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 85–88.

25. Бойков, И. В. Методы сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в моделировании антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : труды Международной научной молодежной школы-семинара имени Е. В. Воскресенского / под редакцией В. Ф. Тишкина. – Саранск : СВМО, 2020. – С. 179–190.

26. Бойков, И. В. Проекционно-итерационные методы решения одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, П. В. Айкашев, А. И. Бойкова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : труды Международной научной молодежной школы-семинара имени Е. В. Воскресенского / под редакцией В. Ф. Тишкина. – Саранск : СВМО, 2020. – С. 171–178.

27. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на предфракталах / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сборник статей IX Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Пенза, 20–22 мая 2015 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – С. 49–58.

28. Бойков, И. В. Проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1. – С. 71–86.

29. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза : Изд-во ПензГТУ, 1996. – 188 с.

30. Бойков, И. В. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова,

М. А. Семов, А. А. Есафьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3. – С. 101–113.

31. Бойков, И. В. Приближенное решение некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Б. М. Стасюк, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 100–112.

32. Бойков, И. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 8. – С. 94–106.

33. Бойков, И. В. К построению квадратурных и кубатурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков, В. А. Есафьева, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1. – С. 94–105.

34. Бузова, М. А. Метод расчета распределения тока полосковой излучающей структуры с киральной подложкой на основе аппарата интегральных гиперсингулярных уравнений / М. А. Бузова, Д. С. Клюев, М. А. Минкин, А. М. Нещерет // Радиотехника. – 2020. – Т. 84, № 6 (11). – С. 38–45.

35. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – Москва : Янус-К, 2001. – 508 с.

36. Вентцель, Э. С. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к исследованию многослойных пластин произвольной формы / Э. С. Вентцель, И. В. Бойков, С. П. Алаткин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3. – С. 37–51.

37. Войтович, Н. И. УКВ вибраторные антенны / Н. И. Войтович, А. В. Ершов, А. Н. Соколов. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 85 с.

38. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – Москва : Наука, 1974. – 456 с.

39. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва : Наука, 1963. – 640 с.

40. Горелик, Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику / Г. С. Горелик. – Москва : Физматлит, 2007. – 656 с.

41. Гохберг, И. Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – Москва : Наука, 1971. – 352 с.

42. Давыдов, А. Г. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы / А. Г. Давыдов, Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов // Доклады Академии наук СССР. – 1984. – Т. 276, № 1. – С. 96–100.

43. Дементьев, А. Н. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн / А. Н. Дементьев, Д. С. Клюев, В. А. Неганов, Ю. В. Соколова. – Москва : Радиотехника, 2015. – 215 с.

44. Ефремова, А. О. Применение фрактальных антенн для беспроводных широкополосных сетей четвертого поколения / А. О. Ефремова, О. А. Белоусов, С. Н. Калашников, О. А. Казарян // Вопросы современной науки и практики. – 2014. – № 3 (53). – С. 56–61.

45. Задирака, В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задирака. – Киев : Наукова думка, 1983. – 216 с.

46. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1984. – 752 с.

47. Ким, И. Фрактальные случайные решетки / И. Ким, Д. Л. Джаггард // Труды Института инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1986. – Т. 74, № 9. С. 124–126.

48. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах : перевод с английского / Р. М. Кроновер. – Москва : Постмаркет, 2000. – 352 с.

49. Линьков, А. М. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости / А. М. Линьков, С. Г. Могилевская // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 1. – С. 116–127.

50. Линьков, А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – Санкт-Петербург, 1999. – 382 с.

51. Лозинский, С. М. Замечание о статье М. С. Годлевского / С. М. Лозинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 457–459.

52. Лозинский, С. М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / С. М. Лозинский // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 5. – С. 52–90.

53. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы : перевод с английского / Б. Мандельброт. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

54. Марчук, Г. И. Численные методы в теории переноса нейтронов / Г. И. Марчук, В. И. Лебедев. – Москва : Атомиздат, 1971. – 496 с.

55. Вычислительные методы в электродинамике : перевод с английского / под редакцией Р. Митры. – Москва : Мир, 1977. – 485 с.

56. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – Москва : Физматгиз, 1962. – 254 с.

57. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Москва : Наука, 1968. – 612 с.

58. Неганов, В. А. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн / В. А. Неганов, Е. И. Нефедов, Г. П. Яровой ; под редакцией В. А. Неганова. – Москва : Радио и связь, 2002. – 416 с.

59. Неганов, В. А. Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению / В. А.Неганов, И. В. Матвеев, С. В. Медведев // Письма в Журнал технической физики. – 2000. – № 12. – С. 86–94.

60. Неганов, В. А. Современная теория и практическое применение антенн / В. А. Неганов, Д. П. Табаков, Г. П. Яровой ; под редакцией В. А. Неганова. – Москва : Радиотехника, 2009. – 720 с.

61. Неганов, В. А. Теоретическое и экспериментальное исследование двухзаходной конической равноугольной логоспиральной антенны малого космического аппарата «Аист-2» / В. А. Неганов, Д. П. Табаков, С. Б. Филиппов, А. С. Мальцев // Радиотехника. – 2015. – № 2. – С. 5–15.

62. Некрасов, А. И. Теория крыла в нестационарном потоке / А. И. Некрасов. – Москва : Изд-во АН СССР, 1947. – С. 3–65.

63. Ненашев, А. С. Математическое моделирование проволочных антенн и расчет входного сопротивления : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : 05.13.18 / Ненашев Анатолий Сергеевич. – Москва, 2003. – 116 с.

64. Нещерет, А. М. Применение сингулярных интегральных уравнений для анализа микрополосковых антенн, расположенных на киральной структуре из левовинтовых спиралей / А. М. Нещерет // Радиотехника. – 2016. – № 4. – С. 118–126.

65. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1973. – 254 с.

66. Потапов, А. А. Новейшие методы обработки изображений / А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман ; под редакцией А. А. Потапова. – Москва : Физматлит, 2008. – 496 с.

67. Потапов, А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки / А. А. Потапов. – Москва : Университетская книга, 2005. – 848 с.

68. Пресдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Пресдорф. – Москва : Мир, 1979. – 494 с.

69. Пруткин, И. Л. О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок / И. Л. Пруткин // Известия АН СССР. Физика Земли. – 1983. – Т. 1. – С. 53–58.

70. Сазонов, Д. М. Антенны и устройства СВЧ / Д. М. Сазонов. – Москва : Высшая школа, 1988. – 434 с.

71. Сизиков, В. С. Обобщенный метод квадратур решения сингулярного интегрального уравнения и вычисления сингулярных интегралов / В. С. Сизиков //

Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сборник статей IX Международной конференции. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 48–54.

72. Сизиков, В. С. Численное решение сингулярного интегрального уравнения / В. С. Сизиков, А. В. Смирнов, Б. А. Федоров // Известия вузов. Математика. – 2004. – Т. 8. – С. 62–70

73. Сизиков, В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – Санкт-Петербург : Спецлитература, 1999. – 240 с.

74. Слюсарь, В. И. Фрактальные антенны / В. И. Слюсарь // Новые технологии. Современные телекоммуникации. – 2002. – № 9. – С. 54–56.

75. Слюсарь, В. Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных» антенн. Часть 2 / В. Слюсарь // Электроника: Наука. Технология. Бизнес. – 2007. – № 6. – С. 82–89.

76. Табаков, Д. П. Аппроксимация решения внутренней электродинамической задачи для тонкого трубчатого вибратора методом собственных функций / Д. П. Табаков, А. Г. Майоров // Труды учебных заведений связи. – 2019. – Т. 5, № 4. – С. 58–64.

77. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва : Наука, 1974. – 285 с.

78. Тихонов, А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн / А. Н. Тихонов, В. И. Дмитриев // Вычислительные методы и программирование. – Вып. XIII. – Москва : Изд-во МГУ, 1969. – С. 209–214.

79. Фельд, Я. Н. Антенны сантиметровых волн / Я. Н. Фельд. – Москва : Советское Радио, 1950. – 315 с.

80. Цалиев, Т. А. $\Delta-$ Фрактальные малоразмерные щелевые антенны / Т. А. Цалиев // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. Серія Радіотехніка, телекомунікація та електроніка. – 2015. – № 1. – С. 5–11.

81. Чечкин, А. В. Метод функциональных пространств для решения обратной задачи теории антенн / А. В. Чечкин // Вычислительные методы и программирование. – Вып. XIII. – Москва : Изд-во МГУ, 1969. – С. 215–221.

82. Чечкин, А. В. Многометрический метод регуляризации / А. В. Чечкин // Вычислительные методы и программирование. – Вып. XXVIII. – Москва : Изд-во МГУ, 1979. – С. 162–176.

83. Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 1953. – Т. 113, Кн. 10. – С. 57–105.

84. Эшли, Х. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов / Х. Эшли, М. Лэндал. – Москва : Машиностроение, 1969. – 129 с.

85. Abraham, M. Phisikalische Zeitschrift / M. Abraham [et al.]. – Leipzig, 1901. – 758 p.

86. Anguera, J. Bowtie Microstrip Patch Antenna Based on the Sierpinski Fractal / J. Anguera, C. Puente, C. Borja and R. Montero // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2001. – Vol. 3. – P. 162–165.

87. Anguera, I. Miniature Wideband Stacked Microstrip Patch Antenna Based on the Sierpinski Fractal Geometry / I. Anguera, C. Puente, C. Borja and J. Romeu // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2000. – Vol. 3. – P. 1700–1703.

88. Anguera, J. Miniature Monopole Antenna Based on the Fractal Hilbert Curve / J. Anguera, C. Puente, J. Soler // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2002. – Vol. 4. – P. 546–549.

89. Barrera-Figueroa, V. Simplification of Poklington's Integral Equation for Arbitrary Bent Thin Wires / V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza and J. Lopez-Bonilla // WIT Transactions on Modelling and Simulation. – 2005. – Vol. 39. – P. 563–574.

90. Bogolyubov, A. N. Fractal Electrodynamics: Analysis and Synthesis of Fractal Antenna Radiation Pattern / A. N. Bogolyubov, A. A. Koblikov, N. E. Shapkina // Progress in Electromagnetics Research Symposium Proceedings. – (Moscow, Russia, August 18–21, 2009). – Moscow, 2009. – P. 879–882.

91. Boykov, I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations / I. V. Boykov // Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory

find Applications ; editors Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti. – Springer, 2021. – P. 63–102.

92. Boykov, I. V. Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova // Axioms. – 2020. – Vol. 9 (3). – P. 74–92.

93. Boykov, I. V. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina // Applied Numerical Mathematics. – 2018. – Vol. 127. – P. 280–305.

94. Boykov, I. V. To the numerical method for synthesis of fractal antennas / I. V. Boykov, P. V. Aikashev // 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED) (Prague, 23–24 April 2019). – 2019. – P. 1–6.

95. Borja, C. Iterative Network Model, to Predict the Behavior of a Sierpinski Fractal Network / C. Borja, C. Puente, A. Median // IEE Electronics Letters. – 1998. – Vol. 34, № 15. – P. 1443–1445.

96. Borja, C. Multiband Sierpinski Fractal Patch Antenna / C. Borja, J. Romen // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2000. – Vol. 3. – P. 1708–1711.

97. Breden, R. Printed Fractal Antennas / R. Breden, R. J. Langley // Proceeding of the IEE National Conference on Antennas and Propagation. – 1999. – P. 1–4.

98. Callejon, J. On the Application of Parametric Models to the Transient Analysis of Resonant and Multiband Antennas / J. Callejon, A. R. Bretones, R. Martin Gomez // IEEE Transactions on Antennas in propagation. – 1998. – P. 312–317.

99. Cohen, N. Are Fractals Naturally Frequency Invariant/dependent? / N. Cohen // 15th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics (ACES). Naval Postgraduate School, Monterey. CA. – 1999. – Vol. I. – P. 101–106.

100. Cohen, N. Fractal Antennas: Part I. / N. Cohen // Communications Quarterly. – Summer. – 1995. – P. 7–22.

101. Gianvittorio, J. P. Fractal Element Antennas: A Compilation of Configurations with Novel Characteristics / J. P. Gianvittorio, Y. Rahmat-Samii //

IEEE International Symposium on Antennas and Propagation. – 2000. – Vol. 3. – P. 1688–1691.

102. Gianvittorio, J. Fractal Antennas: Design, Characterization, and Applications : PhD Dissertation / Department of Electrical Engineering. – University of California Los Angeles, 2000.

103. Gonzalez, J. M. Active Zone Self-similarity of Fractal-Sierpinski Antenna Verified Using Infra-Red Thermograms / J. M. Gonzalez, M. Navano, C. Puente, I. Romeu, A. Aguasca // IEE Electronics Letters. – 1999. – Vol. 35, № 17. – P. 1393–1394.

104. Gregor, I. O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci / I. Gregor // Apl. Mat. – 1961. – Vol. 6, № 3. – P. 214–240.

105. Hadamard, J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de Hydrodynamique. Herman / J. Hadamard. – Paris, 1903. – 320 p. (reprinted by Chelsea. – New York, 1949).

106. Hohlfeld, R. G. Self-Similarity and the Geometric Requirements for Frequency Independence in Antennae / R. G. Hohlfeld, N. Cohen // Fractals. – 1999. – Vol. 7, № 1. – P. 79–84.

107. Kim, T. Park The Koch Island Fractal Microstrip Patch Antenna / T. Kim, J. Yoo, H. Yook // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2001. – Vol. 2. – P. 736–739.

108. Liang, X. Synthesis of fractal pattern from concentric-ring arrays / X. Liang, W. Zhensen, W. Wenbung // Electron. Lett. – 1996. – Vol. 32, № 21. – P. 1940–1941.

109. Michlin, S. G. Singular Integral operators / S. G. Michlin, S. Prossdorf. – Berlin : Acad. – Verb, 1980. – 514 p.

110. Navarro, M. Self-Similar Surface Current Distribution on Fractal Sierpinski Antenna Verified with Infra-Red Thermograms / M. Navarro, J. M. Gonzalcz, C. Puente, J. Romcu, A. Aguasca // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 1993. – Vol. 3. – P. 1566–1569.

111. Pocklington, H. C. Electrical oscillations in wire / H. C. Pocklington // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1897. – № 9. – P. 324–332.

112. Puente, C. Small but Long Koch Fractal Monopole / C. Puente, J. Romeu, R. Pous, J. Ramis, A. Hijazo // IEE Electronics Letters. – 1998. – Vol. 34, № 1. – P. 9–10.

113. Puente, C. Fractal Multiband Antenna Based on the Sierpinski Gasket / C. Puente, J. Romeu, R. Pous, X. Garcia, F. Benitez // IEE Electronics Letters. – 1996. – Vol. 32, № 1. – P. 1–2.

114. Puente, C. On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna / C. Puente, J. Romeu, R. Pous, A. Cardania // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1998. – P. 517–524.

115. Puente, C. Perturbation of the Sierpinski Antenna to Allocate Operating Bands / C. Puente, J. Romeu, R. Pous, R. Bartoleme // IEE Electronics Letters. – 1996. – Vol. 32, № 24. – P. 2186–2188.

116. Puente, C. Variations on the Fractal Sierpinski Antenna Flare Angle / C. Puente, M. Navarro, J. Romeu, R. Pous // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 1998. – Vol. 4. – P. 2340–2343.

117. Puente, C. Analysis of Fractal-Shaped Antennas Using the Multiperiodic Traveling Wave Vee Model / C. Puente, J. Soler // Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – 2001. – P. 158–161.

118. Puente, C. Multiband properties of a fractal tree antenna generated by electrochemical deposition / C. Puente, J. Claret, F. Sagues, J. Romeu, M. Q. Lopez Salvans, R. Pous // IEE Electronics Letters. – 1996. – Vol. 32, № 25. – P. 2298–2299.

119. Puente, C. Fractal-Shaped Antennas and Their Application to GSM / C. Puente // Proceedings of the Millennium Conference on Antennas and Propagation. – 2000.

120. Parron, J. Analysis of a Sierpinski Fractal Patch Antenna Using the Concept of Macro Basis Functions / J. Parron, J. M. Rius, I. Romeu // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2001. – Vol. 3. – P. 616–619.

121. Puente C. Fractal Design of Multiband Antenna Arrays // Elec. Eng. Dept. Univ. – Illinois, Urbana-Champaign, ECE 477 term project, 1993.

122. Puente, C. Diseco Fractal de Agrupaciones de Antennas / C. Puente, R. Pous // IX Symposium Nacional URSI. – Las Palmas, 1994. – Vol. I. – P. 227–231.

123. Rawle, W. D. The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design / W. D. Rawle // High Frequency Electronics. – 2006. – P. 43–47.

124. Sindou, M. Multiband and Wideband Properties of Printed Fractal Branched Antennas / M. Sindou, G. Ablart, C. Sourdois // IEE Electronics Letters. – 1999. – Vol. 35, № 3. – P. 181–182.

125. Sizikov, V. S. Generalized quadrature for solving singular integral equations of Abel type in application to infrared tomography / V. S. Sizikov, D. N. Sidorov // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol. 106. – P. 69–78.

126. Soler, J. Dual-Band Sierpinski Fractal Monopole Antenna / J. Soler, I. Romeu // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2000. – Vol. 3. – P. 1712–1715.

127. Song, C. T. P. Sierpinski Monopole Antenna with Controlled Band Spacing and Input Impedance / C. T. P. Song, P. S. Hall, H. Ghafouri-Shiraz, D. Wake // IEE Electronics Letters. – 1999. – Vol. 35, № 13. – P. 1036–1037.

128. Song, C. T. P. Fractal Stacked Monopole with Very Wide Bandwidth / C. T. P. Song, P. S. Hall, H. Ghafouri-Shiraz, D. Wake // IEE Electronics Letters. – 1999. – Vol. 35, № 12. – P. 945–946.

129. Tang, P. Scaling Property of the Koch Fractal Dipole / P. Tang // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2000. – Vol. 3. – P. 150–153.

130. Vinoy, K. J. Resonant Frequency of Hilbert Curve Fractal Antennas / K. J. Vinoy, K. A. Jose, V. K. Varadan, V. V. Varadan // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2001. – Vol. 3. – P. 648–651.

131. Wemer, D. H., Mittra R. Frontiers in electromagnetics / D. H. Wemer, R. Mittra. – Piscataway ; New Jersey : IEEE Press, 2000.

132. Wemer, D. H. Radiation Characteristics of Thin-wire Ternary Fractal Trees / D. H. Wemer, A. R. Bretones, B. R. Long // IEE Electronics Letters. – 1999. – Vol. 35, № 8. – P. 609–610.

133. Walker, G. J. Fractal Volume Antennas / G. J. Walker, James J. R. // IEE Electronics Letters. – 1998. – Vol. 34, № 16. – P. 1536–1537.

134. Werner, D. H. Genetically Engineered Dual-Band Fractal Antennas / D. H. Werner, P. L. Werner, K. H. Church, J. W. Culver, S. D. Eason // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation. – 2001. – Vol. 3. – P. 628–631.

135. Werner, D. H. Genetically Engineered Multi-Band Fractal Antennas / D. H. Werner, P. L. Werner, K. H. Church // IEE Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, № 19. – P. 1150–1151.

136. Xu, L. Multiband Characteristics of Two Fractal Antennas / L. Xu, M. Y. W. Chia // Microwave and Optical Technology Letters. – 1999. – Vol. 23, № 4. – P. 242–245.

137. Yeo, J. Modified Sierpinski Gasket Patch Antenna for Multiband Applications / J. Yeo, R. Mittra // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Digest. – 2001. – Vol. 3. – P. 134–137.

138. Zhu, I. Feed-point Effects in Hilbert-Curve Antennas / I. Zhu, A. Hoorfar, N. Engheta // IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting URSI Digest. – San Antonio, Texas, 2002. – P. 373.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018612927

Программный комплекс для приближенного решения интегральных уравнений первого рода на фракталах и синтеза фрактальных антенн

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет» (RU)***

Авторы: ***Айкашев Павел Владимирович (RU), Бойков Илья Владимирович (RU)***

Заявка № **2018610019**

Дата поступления **09 января 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***01 марта 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022662731

Программа для приближенного решения уравнения Поклингтона

Правообладатель: ***Федеральное государственое бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет" (RU)***

Авторы: ***Айкашев Павел Владимирович (RU), Бойков Илья Владимирович (RU)***

Заявка № **2022662349**

Дата поступления **04 июля 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***07 июля 2022 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 68b80077e14e40f0a94ecbd24145d5c7

Владелец Зубов Юрий Сергеевич

Действителен с 2.02.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
АО «Научно-производственное
предприятие «Рубин»

АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ «РУБИН» АО «НПП «РУБИН» г. ПЕНЗА ОГРН 1035802518531 ИНН 5835049453 «РУБИН»

А. В. Данилов

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы «Математическое моделирование и численные алгоритмы расчета фрактальных антенн»

Комиссия АО НПП «Рубин» в составе:

- ученого секретаря, д.т.н., профессора Бутаева Михаила Матвеевича;
- заместителя начальника научно-технического центра, к.т.н., доцента, Безносика Димитрия Валентиновича,

рассмотрела диссертационную работу «Математическое моделирование и численные алгоритмы расчета фрактальных антенн», выполненную аспирантом ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» Айкашевым Павлом Владимировичем.

Результаты завершенной работы «Математическое моделирование и численные алгоритмы расчета фрактальных антенн» использованы при разработке пояснительной записки технического проекта ОКР «Гибка-С», в частности алгоритмы расчета характеристик передающих устройств и методика решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях.

Эффект от внедрения результатов работы определяется:

- обеспечением интеллектуальной поддержки процесса проектирования и повышением уровня проектных работ;
- сокращением сроков и снижением затрат на проектирование изделий.

Ученый секретарь, д.т.н., профессор — Бутаев М.М.

Заместитель начальника НТЦ, к.т.н., доцент — Безносик Д.В.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе и

инновационной деятельности

ФГБОУ ВО «ПГУ»

_______________ С.М. Васин

«_01_» ___07___ 20_24_г.

Акт

об использовании результатов диссертационной работы
Айкашева Павла Владимировича «Математическое моделирование и численные алгоритмы расчета фрактальных антенн», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Настоящим подтверждается, что результаты диссертационной работы Айкашева Павла Владимировича, использованы в учебном процессе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный университет» на кафедре «Высшая и прикладная математика» для проведения лекций и практических занятий студентам по специальности 01.03.04 «Прикладная математика», уровень бакалавриата, по дисциплине «Математическое моделирование».

Разработанные численные алгоритмы расчета фрактальных антенн и численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений используются в ходе курсового проектирования и подготовки дипломных работ.

Директор Политехнического института _______________ Г.Б. Козлов

Декан ФВТ _______________ Л.П. Фионова

Заведующий кафедрой ВиПМ _______________ А.Н. Тында